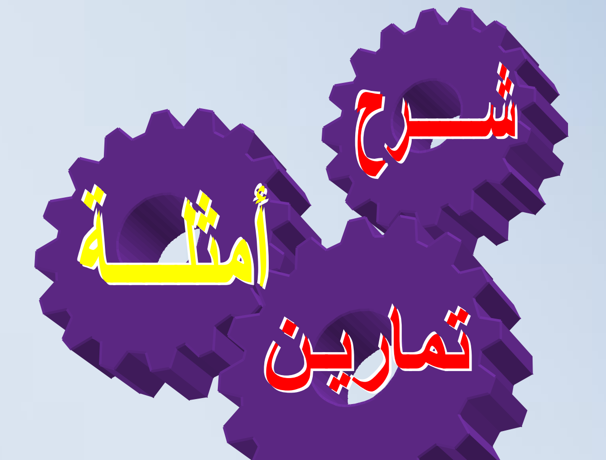


الصف الثالث الإعدادي

٢٠٢٥ م

الفصل الدراسي الأول



الجبر والإحصاء

حساب المثلثات والهندسة





إعداد د/ إسلام شاكر

اسم الطالب



أولاً :

الجـــبر والإحصاء

الحصة الأولى

الوحدة الأولى : العلاقات والدوال

حاصل الضرب الديكارتي

تذكر أن :

١) في الزوج المرتب (س ، ص) يسمى س بالمسقط الأول ، ص بالمسقط الثاني
٢) كل زوج مرتب يمثل بنقطة واحدة فقط في المستوى الإحداثي
٣) (س ، ص) ≠ (ص ، س) حيث : س ≠ ص
٤) (س ، ص) ≠ { س ، ص }
٥) إذا كان : (س ، ص) = (أ ، ب)
فإن : س = أ ، ص = ب

مثال : أوجد س ، ص
إذا كان : (س – ٢ ، ٣) = (٥ ، ص + ١)
الحل :

س – ٢ = ٥	٣ = ص + ١
س = ٥ + ٢	ص = ٣ – ١
∴ س = ٧	∴ ص = ٢

حاصل الضرب الديكارتي لمجموعتين

حاصل الضرب الديكارتي للمجموعة س في المجموعة ص ويرمز له بالرمز س×ص عبارة عن جميع الأزواج المرتبة التي مسقطها الأول عنصر في س، ومسقطها الثاني عنصر في ص

مثال : إذا كانت س = { أ ، ب } ، ص = { -١ ، ٠ ، ٣ }
فأوجد س×ص ، ص × س ماذا تلاحظ ؟

الحل :
س×ص = { (أ ، -١) ، (أ ، ٠) ، (أ ، ٣) ، (ب ، -١) ، (ب ، ٠) ، (ب ، ٣) }
ص × س = { (-١ ، أ) ، (-١ ، أ) ، (٠ ، أ) ، (٠ ، ب) ، (٣ ، ب) ، (٣ ، ب) }
تلاحظ أن : س×ص ≠ ص × س

ملاحظات :
١) إذا كانت س ، ص مجموعتين منتهيتين وغير خاليتين
فإن : س×ص = { (أ ، ب) : أ ∈ س ، ب ∈ ص }
٢) س×ص ≠ ص × س
٣) إذا كان (ك ، م) ∈ س×ص فإن : ك ∈ س ، م ∈ ص
٤) س×س = { (أ ، ب) : أ ، ب ∈ س }
وتكتب أحياناً س^٢ وتقرأ (س اثنين)
٥) ن (س×ص) = ن (س) × ن (ص) : ن عدد العناصر
٦) ∅ × س = س × ∅ = ∅ ومنها ن (س × ∅) = ٠

مثال : إذا كانت س = { ١ } ، ص = { ٢ ، ٣ }
ع = { ٣ ، ٥ ، ٦ } **فأوجد :**
١) (س×ص) ∪ (ص × ع) ٢) س × (ص ∩ ع)
٣) (ع - ص) × (س ∪ ص)

الحل :
س×ص = { (١ ، ٢) ، (١ ، ٣) }
ص × ع = { (٢ ، ٣) ، (٢ ، ٥) ، (٢ ، ٦) ، (٣ ، ٣) ، (٣ ، ٥) ، (٣ ، ٦) }
(س×ص) ∪ (ص × ع) = { (١ ، ٢) ، (١ ، ٣) ، (٢ ، ٣) ، (٢ ، ٥) ، (٢ ، ٦) ، (٣ ، ٣) ، (٣ ، ٥) ، (٣ ، ٦) }
∵ ص ∩ ع = { ٣ }
∴ س × (ص ∩ ع) = { ١ } × { ٣ } = { (١ ، ٣) }
∵ ع - ص = { ٥ ، ٦ } ، س ∪ ص = { ١ ، ٢ ، ٣ }
∴ (ع - ص) × (س ∪ ص) = { ٥ ، ٦ } × { ١ ، ٢ ، ٣ }
= { (٥ ، ١) ، (٥ ، ٢) ، (٥ ، ٣) ، (٦ ، ١) ، (٦ ، ٢) ، (٦ ، ٣) }

تمارين

س ١) أكمل ما يأتي :
١) إذا كان (٦ ، ب -٣) = (٢ – أ ، -١) فإن أ = ...
ب = ...

٢) إذا كان (أ + ٥ ، ٣) = (٨ ، ب – ١)
فإن : أ = ... ، ب = ...

٣) إذا كان : (س^٥ ، ص + ١) = (٣٢ ، ∛٢٧)
فإن : س = ... ، ص = ...

٤) إذا كانت (س – ١ ، ١١) = (٨ ، ص + ٣)

فإن : $\sqrt{\text{س} + ٢\ \text{ص}}$ = ...

٥) إذا كانت ن(س٢) = ٩ فإن : ن (س)= ....

٦) إذا كانت : س × ص= { (٢ ، ٦)، (٢ ، ٩) ، (٣ ، ٦)، (٣ ، ٩) ، (٥ ، ٦) ، (٥ ، ٩) }

فإن : س= .... ، ص= ....

٧) اذا كان ن (س) = ٣ ، ن(س×ص) = ١٢ فإن ن(ص) = ...

٨) اذا كان س = {٣} فإن ن(س٢) = ...

٩) اذا كانت (٣ ،٥) ∈ { ٣ ، ٦ } × { س ، ٨} فإن س = ...

١٠) اذا كان س = {٢} ، ص = { ٣ } فإن ن(س×ص)= ......

س٢) اختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس:

١) إذا كانت ن(س)= ٤ ، ن (س × ص) = ٣٦

فإن ن(ص) = ... (٤ ، ٩ ، ١٥ ، ٣٦)

٢) إذا كانت {٢} × {س ، ص}= { (٢ ، ٤) ، (٢ ، ٣) }

فإن : س – ص = ... (٠ ، ١ ، -١ ، ±١)

٣) اذا كان ن(س٢) = ٤ ، ن(س×ص) = ٦ فإن ن(ص٢)=

.... (٤ ، ٩ ، ١٢ ، ١٦)

س٣) إذا كانت س= { ٢ ، ٣ } ، ص= { ٣ ، ٤ ، ٥ }

أوجد : ١) س × ص

٢) ن (س × ص) ، ن (ص٢)

٣) (س × ص) ∩ ص٢

س٤) إذا كانت س= { ٣ ، ٤ }،

ص× ع = {(٤ ، ٥)، (٤ ، ٦) ، (٥ ، ٥) ، (٥ ، ٦)}

أوجد : ١) س × ص

٢) س × (ص ∩ ع) ٣) (س × ص) ∩ ص٢

٤) (س - ص) × (ص -ع)

الواجب المنزلى

س١) اذا كان س×ص = { (١ ، ١) ، (١ ، ٣) ، (١ ، ٥) }

اوجد س

ص

ص × س

ص٢

س٢: إذا كانت س= { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } ، ص = { ٣ ، ٤ ، ٥ }

أوجد : ١) س × ص

٢) (س∩ص) × ص

٣) (س - ص) × ص

تمثيل حاصل الضرب الديكارتي لمجموعتين

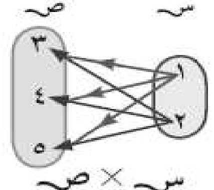
١) المخطط السهمي ٢) المخطط البياني

مثـال : إذا كانت س= { ١ ، ٢ } ، ص= { ٣ ، ٤ ، ٥ }

فأوجد : س×ص ومثله بالمخطط السهمي والمخطط البياني

الحل : س × ص= { (١ ، ٣) ، (١ ، ٤) ، (١ ، ٥) ، (٢ ، ٣) ، (٢ ، ٤) ، (٢ ، ٥) }

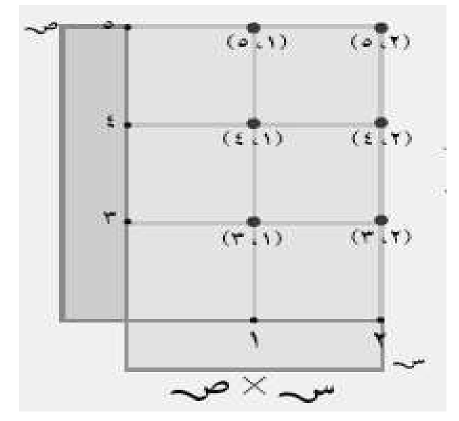
١) المخطط السهمي



نرسم سهماً من كل عنصر يمثل المسقط الأول (وهي عناصر س) إلى كل عنصر يمثل المسقط الثاني (وهو عناصر ص)

٢) المخطط البياني (الشبكة البيانية المتعامدة)

تمثل على شبكة بيانية متعامدة عناصرالمجموعة س أفقياً ، وعناصر ص رأسياً فتكون نقط تقاطع الخطوط الأفقية والرأسية تمثل الأزواج المرتبة لحاصل الضرب الديكارتي س × ص

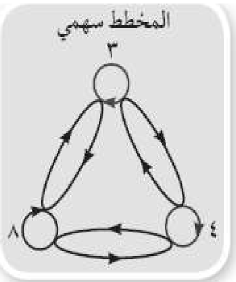


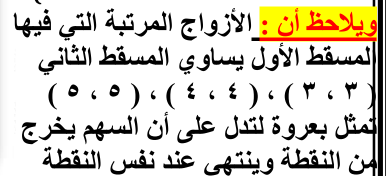
مثـال : إذا كانت س= { ٣ ، ٤ ، ٨ }

فأوجد : س× س ومثله بمخطط سهمي

الحل :

س × س= { (٣ ، ٣) ، (٣ ، ٤) ، (٣ ، ٨) ، (٤ ، ٣) ، (٤ ، ٤) ، (٤ ، ٨) ، (٨ ، ٣) ، (٨ ، ٤) ، (٨ ، ٨) }





ويلاحظ أن : الأزواج المرتبة التي فيها المسقط الأول يساوي المسقط الثاني (٣ ، ٣) ، (٤ ، ٤) ، (٥ ، ٥) تمثل بعروة لتدل على أن السهم يخرج من النقطة وينتهي عند نفس النقطة

حاصل الضرب الديكارتي للمجموعات غير المنتهية

الحاصل الديكارتي ط ×ط = {(س ، ص) : س ، ص∈ ط }

مثـال :

النقطة ٩ تمثل الزوج المرتب (٣ ، ٢)

النقطة ب تمثل (٠ ، ٤)

النقطة جـ تمثل (٥ ، ٠)

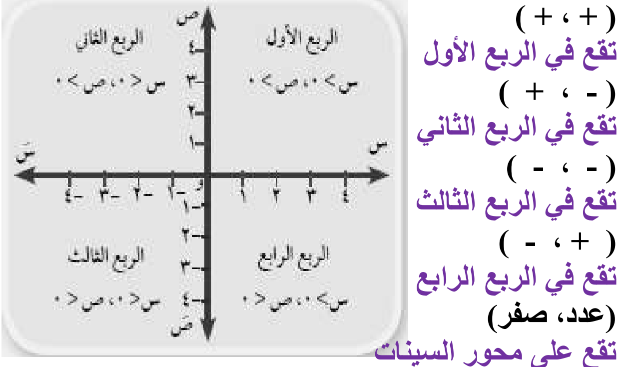
كذلك

الحاصل الديكارتي ص ×ص = {(س ، ص) : س، ص ∈ ص}

الحاصل الديكارتي ∂ × ∂ = {(س ، ص) : س، ص ∈ ∂ }

الحاصل الديكارتي ح ×ح = {(س ، ص) : س ، ص ∈ ح }

تحديد الربع الذي يقع فيه الزوج المرتب



(+ ، +) تقع في الربع الأول

(- ، +) تقع في الربع الثاني

(- ، -) تقع في الربع الثالث

(+ ، -) تقع في الربع الرابع

(عدد، صفر) تقع على محور السينات

(صفر، عدد) تقع على محور الصادات

مثـال :

كون شبكة تربيعية ح × ح ثم اذكر الربع الذي تقع فيه أو المحور الذي تنتمي إليه كل من النقاط الآتية

٩(٣،٣)، ب (٣،-٢)، جـ(-٤،-٢)، د(-٣،٤)، هـ(٠، -٣)، و(٢،٠)

الحل :

٩(٣ ، ٣) الأول

ب (٣ ، -٢) الرابع

جـ(-٤،-٢) الثالث

د(-٤,٣) الثاني

هـ(٠، -٣) على محور الصادات

و(٠,٢) على محور السينات

العلم هو المفتاح الذي يفتح أبواب الفرص ويحقق الأحلام

تمارين

اختر الاجابة الصحيحة مما بين القوسين :-

١) إذا كانت النقطة (٥ ، ب – ٧) تقع على محور السينات

فإن ب = ... (٢ ، ٥ ، ٧ ، ١٢)

٢) النقطة (٠ ، -٥) تقع ....

(في الربع الثالث ، في الربع الرابع ، على محور الصادات)

٣) اذا كانت النقطة (س ، ص) تقع في الربع الثالث فإن النقطة

(س٣ ، ص٢) تقع في الربع (الاول ، الثاني ، الثالث ، الرابع)

٤) اذا كان س < صفر ، ص < صفر فإن النقطة التي تقع في

الربع الثاني هي ....

((س ، ص) ، (- س ، ص) ، (س ، - ص) ، (- س ، - ص))

٥) اذا كانت النقطة (س – ٢ ، س – ٤) تقع في الربع الرابع فإن س

= .... (صفر ، ٢ ، ٣ ، ٤)

س٢)اذا كان س = { ٣ ، ٤ ، ٥ } اوجد س٢ بالمخطط السهمي

س٣) على الشبكة البيانية المتعامدة للحاصل الديكارتي ح × ح عين النقاط الآتية : أ (-٤ ، -٥) ، ب (٠ ، -٢) ،

ج (٥ ، -٢)، د (٣ ، ٠)، هـ (٤ ، ٥)، و (-١ ، ٣)

ثم اذكر الربع الذي تقع فيه أو المحور الذي تنتمي إليه كل من النقاط الآتية

الواجب المنزلي

أكمل ما يلي :

١) النقطة (-٢ ، -٧) تقع في الربع ....

٢) النقطة (٣ ، -٥) تقع في الربع ....

٣) اذا كان ب< ٢ فإن النقطة (ب – ٢ ، ٤) تقع في الربع

....

٤) اذا كان النقطة (س ، ٧) تقع علي محور الصادات فإن

٥س+١ = ...

س٢) اذا كان س = { ١ ، ٢ } ، ص = { ٣ ، ٤ ، ٥ } اوجد س×ص بالمخطط السهمي والبياني

س٣) على الشبكة البيانية المتعامدة للحاصل الديكارتي ح × ح عين النقاط الآتية : أ (٣ ، ٢) ، ب (- ٣ ، - ١) ،

ج (- ٤ ، ٢)، د (٣ ، ٣)، هـ (٤ ، ٠)، و (٢ ، - ٣)

ثم اذكر الربع الذي تقع فيه أو المحور الذي تنتمي إليه كل من النقاط الآتية

العلاقـــات والدالة

العلاقة بين المجموعتين س، ص

العلاقة من مجموعة س إلى مجموعة ص هي ارتباط يربط بعض أو كل عناصر س ببعض أو بكل عناصر ص

بيان العلاقة من مجموعة س إلى مجموعة ص

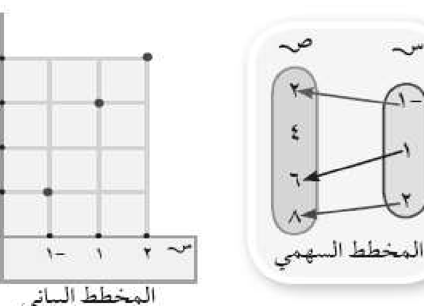
هي مجموعة الأزواج المرتبة حيث المسقط الأول في كل منها ينتمي إلى س والمسقط الثاني ينتمي إلى ص
(الأزواج المرتبة التي تحقق العلاقة)

مثال : إذا كانت س = { ٣ ، ١ ، ٢ } ،
ص = { ١ ، ٢ ، ٣، ٤ ، ٥، ٦ }
وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث " م ع ب"
تعني" م = $\frac{1}{2}$ ب " لكل م ∈ س، ب ∈ ص
كتب بيان ع

الحل : بيان ع = { (١ ، ٢) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٦)}

مثال :
إذا كانت س = { -١ ، ١ ، ٢ } ، ص = { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ }
وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث " م ع ب"
تعني" ب = ٢ م + ٤ " لكل م ∈ س، ب ∈ ص
كتب بيان ع ومثله بمخطط سهمي وآخر بياني

الحل : ب = ٢ م + ٤
عندما م = -١ ب = ٢× (-١) + ٤ = -٢ + ٤ = ٢ ∈ ص
عندما م = ١ ب = ٢× (١) + ٤ = ٢ + ٤ = ٦ ∈ ص
عندما م = ٢ ب = ٢× (٢) + ٤ = ٤ + ٤ = ٨ ∈ ص
∴ بيان ع = { (-١ ، ٢) ، (١ ، ٦) ، (٢ ، ٨)}



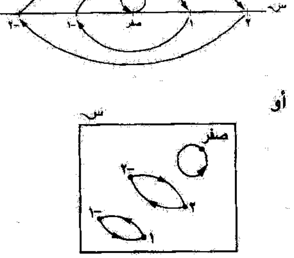
لاحظ : إذا كانت ع علاقة من مجموعة س إلى مجموعة ص
فإن : ع ⊂ س × ص

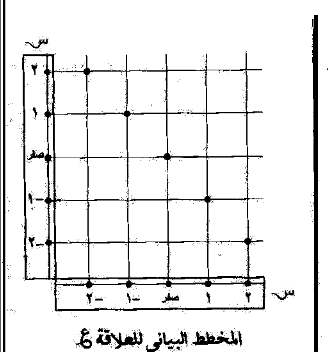
العلاقة من مجموعة إلى نفسها

إذا كان ع علاقة من س إلى س فإن : ع تسمى علاقة على س
وتكون : ع ⊂ س × س

مثال : إذا كانت س = { -٢ ، -١ ، ٠ ، ١ ، ٢ }
وكانت ع علاقة معرفة على س حيث " م ع ب"
تعني" العدد م معكوس جمعي للعدد ب " لكل م ، ب ∈ س
اكتب بيان ع ومثله بمخطط سهمي وآخر ديكارتي

الحل :
ع = {(-٢ ، ٢)،(-١ ، ١)،(٠ ، ٠)،(١ ، -١)،(٢ ، -٢)}





الدالة (التطبيق)

يقال لعلاقة من س إلى ص أنها دالة إذا تحققت إحدى الحالات الآتية : (كيف تعرف أن العلاقة تمثل دالة)

من بيان العلاقة

١) كل عنصر من عناصر س يظهر مرة واحدة فقط كمسقط أول في أحد الأزواج المرتبة التي تنتمي إلى بيان العلاقة

من المخطط السهمي

٢) كل عنصر من عناصر س يخرج منه سهم واحد فقط إلى أحد عناصر ص

من المخطط البياني

٣) كل خط رأسي تقع عليه نقطة واحدة فقط من النقط التي تمثل العلاقة

لاحظ : كل دالة علاقة وليست كل علاقة دالة

يرمز للدالة من المجموعة س إلى المجموعة ص بأحد الرموز
أو ر أو ه .... وتكتب رياضياً د : س ⟵ ص
وتقرأ " د دالة من س إلى ص "

لاحظ : إذا كانت : د دالة من المجموعة س إلى نفسها
أي د : س ⟵ س فنقول أن : " د دالة على س"

المجال و المجال المقابل و المدى لدالة

إذا كانت : د دالة من المجموعة س إلى المجموعة ص

أي د : س ⟵ ص فإن :

١) المجموعة س تسمى " مجال الدالة د "

٢) المجموعة ص تسمى " المجال المقابل للدالة د "

٣) "مدى الدالة " مجموعة صور عناصر مجموعة المجال

لاحظ : المدى مجموعة جزئية من الجال المقابل ص

مثـال : إذا كانت س= { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ } ،

ص= { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ }

وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث " ٩ ع ب"

تعني" ٩ = $\frac{١}{٢}$ ب " لكل ٩ ∈ س ، ب ∈ ص

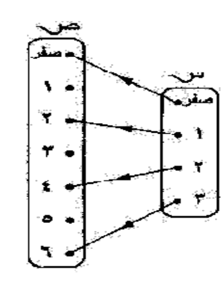
اكتب بيان ع ومثله بمخطط سهمي وآخر بياني

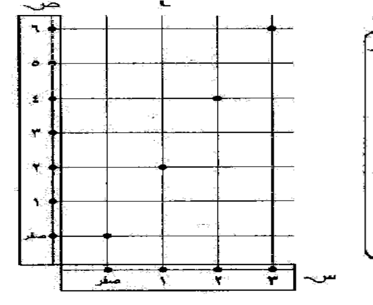
اذكر مع بيان السبب هل ع تمثل دالة من س إلى ص أم لا ،

وإذا كانت دالة فاذكر مجالها ومجالها المقابل ومداها

الحل :

* بيان ع = { (٠ ، ٠) ، (١ ، ٢) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٦) }





* ع تمثل دالة من س إلى ص

* السبب : لأن كل عنصر من عناصر س ارتبط بعنصر واحد فقط من عناصر ص

* مجال الدالة هو المجموعة س

* المجال المقابل للدالة هو المجموعة ص

* مدى الدالة = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٦ }

تمارين

س١) إذا كانت س= { ١ ، ٢ ، ٣ } ،

ص= { ١ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٥}$ }

وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث " ٩ ع ب" تعني

" العدد ٩ معكوس ضربي للعدد ب " لكل ٩ ∈ س ، ب ∈ ص

اكتب بيان ع

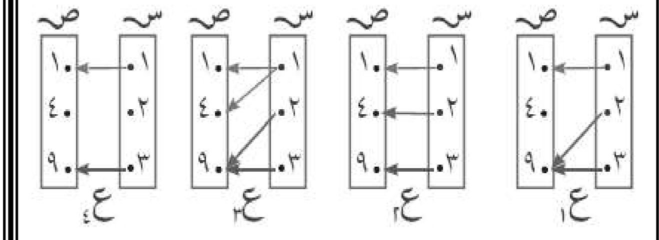
س٢) إذا كانت س= { ٢ ، ٤ ، ٥ ، ٧ } ،

ص= { ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ }

وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث " ٩ ع ب" تعني

" ٩ ⩾ ب " لكل ٩ ∈ س ، ب ∈ ص اكتب بيان ع

س٣) أي من العلاقات الآتية يمثل دالة واذكر مداها



س٤) إذا كانت س= { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } ،

ص= { ١ ، ٤ ، ٥ ، ٧ ، ٩ }

وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث " ٩ ع ب" تعني

" ٩ = $\sqrt{ب}$ " لكل ٩ ∈ س ، ب ∈ ص

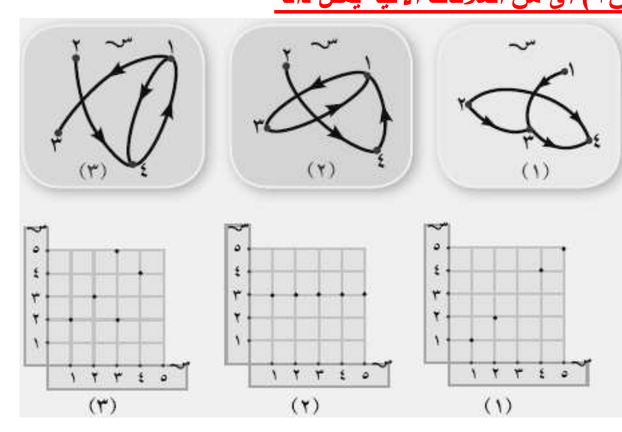
اكتب بيان ع ومثله بمخطط سهمي ، هل ع دالة ؟ ولماذا ؟

س٥) إذا كانت سـ = { ١ ، ٢ ، ٤ ، ٦ ، ١٠ }
وكانت ع علاقة على سـ حيث " م ع ب"
تعني تعني" م مضاعف ب " لكل م ∈ سـ، ب ∈ سـ
اكتب بيان ع ومثله بمخطط بياني ، هل ع دالة ؟ ولماذا ؟

س٦) إذا كانت سـ = { ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ } ،
صـ = { ٥ ، ٩ ، ١٠ ، ١٣ ، ١٧ }
وكانت ع علاقة من سـ إلى صـ حيث " م ع ب"
تعني تعني" ب = ٢ م + ٣ " لكل م ∈ سـ، ب ∈ صـ
اكتب بيان ع ومثله بمخطط سهمي ، هل ع دالة ؟ ولماذا ؟
اذكر مع بيان السبب هل ع تمثل دالة من سـ إلى صـ أم لا ،
وإذا كانت دالة فاذكر مجالها ومجالها المقابل ومداها

الواجب المنزلي

س١) أي من العلاقات الآتية يمثل دالة



س٢) إذا كانت سـ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٦ ، ١١ }
وكانت ع علاقة على سـ حيث " م ع ب"
تعني تعني" م + ٢ ب = عدد فردي " لكل م ∈ سـ، ب ∈ سـ
اكتب بيان ع ومثله بمخطط سهمي ، هل ع دالة ؟ ولماذا ؟

س٣) إذا كانت سـ = { ٢ ، ٥ ، ٨ } ،
صـ = { ١٠ ، ١٦ ، ٢٤ ، ٣٠ }
وكانت ع علاقة من سـ إلى صـ حيث " م ع ب"
تعني" م عامل من عوامل ب " لكل م ∈ سـ، ب ∈ صـ
اكتب بيان ع ومثله بمخطط سهمي ، هل ع دالة ؟ ولماذا ؟

س٣) إذا كانت سـ = { ٠ ، ١ ، ٤ ، ٧ } ،
صـ = { ١ ، ٣ ، ٥ ، ٦ }
وكانت ع علاقة من سـ إلى صـ حيث " م ع ب"
تعني" م + ب < ٨ " لكل م ∈ سـ، ب ∈ صـ
اكتب بيان ع ومثله بمخطط بياني ، هل ع دالة ؟ ولماذا ؟

الدراسة هي السلم الذي يصعد به الإنسان نحو النجاح

التعبير الرمزي عن الدالة

دوال كثيرات الحدود

الدالة كثيرة الحدود

هي دالة قاعدتها (صورة س) حد أو مقدار جبري

مثال : د(س) = ٣

د(س) = ٢ س + ٥

د(س) = س^{٢} – ٢ س + ٣

ويتوفر فيها الشرطان :

١) مجالها ومجالها المقابل مجموعة الأعداد الحقيقية ح

أي أن : د : ح ⟵ ح

٢) قوة المتغير س (الأس) عباره عن عدد طبيعي

درجة الدالة كثيرة الحدود

هي أكبر قوة للمتغير في قاعدة الدالة (أعلى أس)

مثال : د(س) = ٣ من الدرجة الصفرية (دالة ثابتة)

د(س) = ٢ س + ٥ من الدرجة الأولى (دالة خطية)

د(س) = س^{٢} – ٢ س + ٣ من الدرجة الثانية (دالة تربيعية)

د(س) = س^{٣} – ٥ س^{٢} + ٤ من الدرجة الثالثة (دالة تكعيبية)

اذا كانت د : دالة من المجموعة س الي المجموعة ص أي

د:س⟵ص فإن س تسمي مجال الدالة د

ص تسمي المجال المقابل للدالة د

مجموعة صور عناصر مجموعة المجال س بالدالة د تسمي

مدي الدالة د وهي مجموعة جزئية من المجال المقابل ص

◄ عند بحث ما اذا كانت دالة تمثل كثيرة حدود ام لا فإننا لا نقوم بتبسيط قاعدتها

الدالة د : د(س) = س(س+ $\frac{١}{س}$) لاتمثل دالة كثيرة حدود لان

د(٠) ∌ ح بينما الدالة د : د(س) = س٢ +١ تمثل دالة كثيرة حدود

دراسة بعض دوال كثيرات الحدود

أولاً : الدالة الثابتة

صورتها د(س)= ٩

مثال : د(س)=٣، د(س)= - ٥ ، د(س)= صفر

وتمثل بخط مستقيم يوازي محور السينات

مثال : مثل بيانياً الدالة

د : د(س)=٣

الحل : تمثل بيانياً بخط يوازي محور السينات من عند النقطة (٠ ، ٣)

ثانياً : الدالة الخطية

صورتها د(س)= ٩ س + ب

دالة خطية (من الدرجة الأولى) ، ٩ ≠ صفر

مثال : د(س)=٢ س + ٥ ، د(س)= س + ١

التمثيل البياني للدالة الخطية :

لتمثيل علاقة بين متغيرين نوجد ثلاثة أزواج مرتبة تحقق العلاقة ثم نقوم بتمثيلها على الشبكة التربيعية

مثال : مثل بيانياً الدالة د : د(س)=٢س - ١

الحل : نختار أي قيم لـ س ثم نوجد قيمة ص المقابلة لها

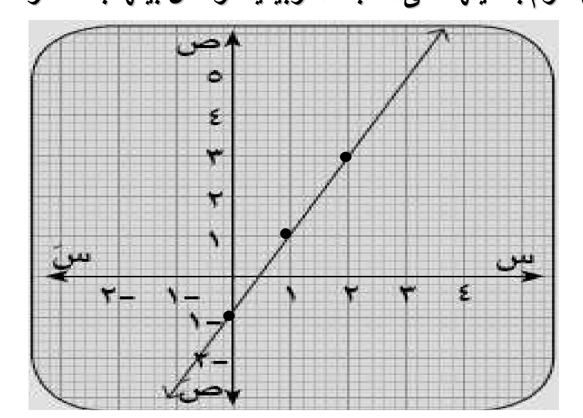
س = ٠ ⟸ د(٠) = ٢ × ٠ – ١ = ٠ – ١ = -١ (٠ ، –١)

س = ١ ⟸ د(١)= ٢ × ١ – ١ = ٢ – ١ = ١ (١ ، ١)

س = ٢ ⟸ د(٢)= ٢ × ٢ – ١ = ٤ – ١ = ٣ (٢ ، ٣)

الأزواج المرتبة : (٠ ، –١) ، (١ ، ١) ، (٢ ، ٣)

ثم نقوم بتمثيلها على الشبكة التربيعية ونصل بينها بالمسطرة



تمارين

١) الدالة د(س)= س^{٢} (س + ٢)^{٢} هي دالة كثيرة حدود من الدرجة ....

٢) الدالة د(س)= س^{٢} - (س – ٥)^{٢} هي دالة كثيرة حدود من الدرجة ....

٣) اذا كانت د(س) = س^{٢} – س – ٢ فإن د(-٣) = ...

٤) اذا كانت د(س) = ٤س + ك وكانت د(٢) = ١٥ فإن ك = ...

٥) اذا كانت الدالة د: س ⟵ ص فإن مدي الدالة ⊃ ....

٦) مجموعة صور عناصر مجال الدالة تسمي ....

٧) الدالة د : د(س) = (س – ٥) ٣ هي كثيرة حدود من الدرجة ....

٨) اذا كانت د(س) = ك س + ٨ ، د(٢) = صفر فإن قيمة ك = ...

٩) الدالة د(س) = س٤ – ٢س٣ +٧ كثيرة حدود من الدرجة
....

١٠)اذا كان د(س) = س٢ فإن د(٢) + د(-٢) = ...

١١)اذا كان د(س) = ٧ فإن د(- ٣) = ...

١٢)اذا كان د (س) = ٥ فإن د(٥) + د(-٥) = ...

١٣)اذا كانت د(س) = ٢ فإن د(٣) – د(١) = ...

١٤)اذا كانت د(س) = ٣ فإن ٢د(٣) ÷ ٣د(٢) = ...

١٥)الدالة د(س) = ٣س يمثلها بيانيا خط مستقيم يمر بالنقطة
....

١٦)اذا كانت النقطة (ب ، ٣) تقع علي الخط المستقيم الممثل للدالة د(س)= ٤س – ٥ فإن ب = ...

١٧)اذا كان د(س) = ٦س – ب يقطع محور الصادات في النقطة (أ ، ٢) فأوجد قيمة أ ، ب

١٨)في الشكل المقابل يمثل الدالة د(س) = ٤ – ٢س اوجد
احداثيي كل من النقطتين أ ، ب
مساحة سطح المثلث أ و ب

ص
أ
و
ب
س

١٩) مثل بيانا الدالة د(س) = -٤

س١) مثل بيانياً الدالة د : د(س)=٣ س + ٢

الواجب المنزلي :

١)مثل بيانا الدالة د :د(س) = ٥

٢)مثل بيانيا الدالة د: د(س) = ٣س – ١

٣) اذا كان د(س) = ٢س + أ وكان د(٣) = ٩ فاوجد قيمة أ ثم اوجد احداثيي نقطة تقاطع المستقيم الذي يمثل الدالة د مع محور السينات

٤) اذا كانت د(س) = أس + ب وكانت د(أ) = ب فاوجد قيمة المقدار أ ب٢ +٥

ثالثاً : الدالة التربيعية

صورتها $د(س) = ٲ س^{٢} + ب س + جـ$ ، ٲ ≠ صفر

دالة تربيعية (كثيرة حدود من الدرجة الثانية)

مثال : $د(س) = س^{٢}$ ، $د(س) = س^{٢} + ٢$

$د(س) = س^{٢} + ٢ س - ٥$

التمثيل البياني للدالة التربيعية :

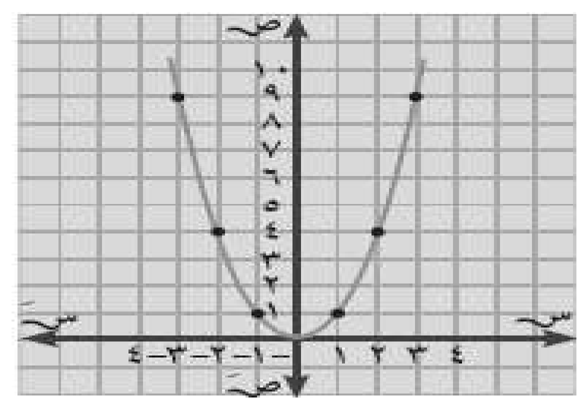
لتمثيل علاقة بين متغيرين نوجد ثلاثة أزواج مرتبة تحقق العلاقة
ثم نقوم بتمثيلها على الشبكة التربيعية

مثال : مثل بيانياً الدالة د : $د(س) = س^{٢}$ ، س ∈ [-٣ ، ٣]
ومن الرسم أوجد : ١) نقطة رأس المنحنى
٢) معادلة محور التماثل ٣) القيمة العظمى أو الصغرى للدالة

الحل : نكون الجدول الآتي على حسب الدالة المعطاة

س	$س^{٢}$	د (س)	الزوج المرتب
-٣	٩	٩	(-٣ ، ٩)
-٢	٤	٤	(-٢ ، ٤)
-١	١	١	(-١ ، ١)
٠	٠	٠	(٠ ، ٠)
١	١	١	(١ ، ١)
٢	٤	٤	(٢ ، ٤)
٣	٩	٩	(٣ ، ٩)

ثم نقوم بتمثيل الأزواج المرتبة على الشبكة التربيعية



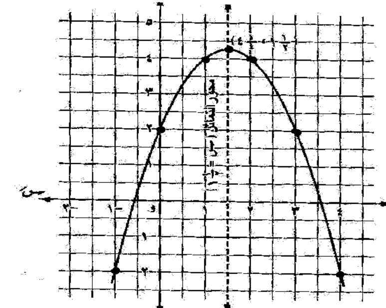
من الرسم : رأس المنحنى (٠ ، ٠)
معادلة محور التماثل(س = ٠)(العدد الأول في رأس المنحنى)
القيمة الصغرى للدالة = ٠ (العدد الثاني في رأس المنحنى)

مثال : مثل بيانياً الدالة د : $د(س) = - س^{٢} + ٣ س + ٢$
، س ∈ [-١ ، ٤] ومن الرسم أوجد :
١) نقطة رأس المنحنى ٢) معادلة محور التماثل
٣) القيمة العظمى أو الصغرى للدالة

الحل : نكون الجدول الآتي على حسب الدالة المعطاة

س	$- س^{٢}$	٣ س	+ ٢	د (س)	الزوج المرتب
-١	-١	-٣	+ ٢	-٢	(-١ ، -٢)
٠	٠	٠	+ ٢	٢	(٠ ، ٢)
١	-١	٣	+ ٢	٤	(١ ، ٤)
٢	-٤	٦	+ ٢	٤	(٢ ، ٤)
٣	-٩	٩	+ ٢	٢	(٣ ، ٢)
٤	-١٦	١٢	+ ٢	-٢	(٤ ، -٢)

ثم نقوم بتمثيل الأزواج المرتبة على الشبكة التربيعية



نلاحظ من الجدول أن نقطة رأس المنحنى ليست ضمن هذه النقاط مما يجعل دراسة المنحنى صعباً

إيجاد رأس المنحنى للدالة التربيعية

الإحداثي السيني = $\frac{-ب}{٢ ٲ}$ ، الإحداثي الصادي = $د(\frac{-ب}{٢ ٲ})$

حيث : ب معامل س ، ٲ معامل $س^{٢}$

ٲ = -١ ، ب = ٣

$س = \frac{-٣}{٢ \times (-١)} = \frac{-٣}{-٢} = ١ \frac{١}{٢}$

$ص = د(١ \frac{١}{٢}) = \frac{-٩}{٤} + \frac{٩}{٢} + ٢ = ٢ \frac{١}{٤}$

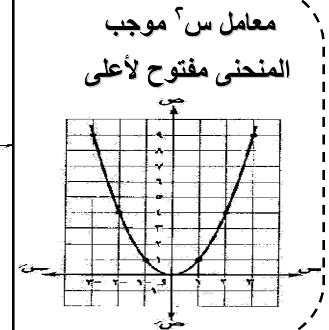
∴ رأس المنحنى ($١ \frac{١}{٢}$ ، $٢ \frac{١}{٤}$)

من الرسم : معادلة محور التماثل $س = ١ \frac{١}{٢}$

القيمة الصغرى للدالة = $٢ \frac{١}{٤}$

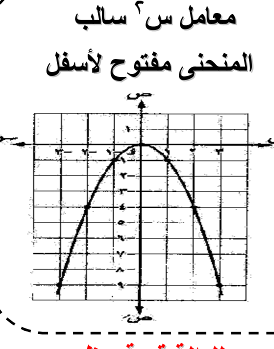
ملحوظة : إذا كان

معامل $س^{٢}$ موجب
المنحنى مفتوح لأعلى



للدالة قيمة صغرى

معامل $س^{٢}$ سالب
المنحنى مفتوح لأسفل



للدالة قيمة عظمى

تمارين

١) اذا كانت النقطة (٣ ، ٢) هي رأس منحنى الدالة التربيعية د فإن معادلة خط التماثل هي ....

٢) نقطة رأس المنحني للدالة د : د(س) = ٢س٢ – ٤س +٥ هي ....

٣) معادلة خط التماثل لمنحني الدالة د : د(س) = س٢ هي ....

٤) القيمة العظمي للدالة د(س) = ـ٢س٢ + ٤س+٣ هي ....

٥) اذا كانت د(س) = س٢ ، س∈ [ـ٢ ، ٢] فإن د(س) ∈ .....

([٠ ، ٤] ،] ٠ ، ٤ [، [٠ ، ٤] ،[ـ٤ ، ٤])

س١) مثل بيانياً الدالة د : د(س)= $س^{٢}$ ـ ٢ س – ٣ ، س ∈ [ـ ٢ ، ٤] ومن الرسم أوجد :
١) نقطة رأس المنحنى ٢) معادلة محور التماثل
٣) القيمة العظمى أو الصغرى للدالة

الحل :

س	$س^{٢}$	ـ٢ س	ـ ٣	د(س)	الزوج المرتب

من الرسم : رأس المنحنى
معادلة محور التماثل
القيمة الصغرى للدالة

الواجب المنزلي :

مثل بيانياً الدالة د : د(س)= $س^{٢}$ +١ ، س ∈ [ـ ٣ ، ٣] ومن الرسم أوجد :
١) نقطة رأس المنحنى ٢) معادلة محور التماثل
٣) القيمة العظمى أو الصغرى للدالة

لا تفكر في المذاكرة كعبء، بل انظر إليها كفرصة لتحقيق أحلامك

مراجعة على الوحدة الأولى
العلاقات والدوال
أولا : الأسئلة الموضوعية

س ١) أكمل ما يأتي :

(١) النقطة (٥ ، -٣) تقع في الربع ....

(٢) النقطة (٤ ، ٠) تقع على محور ....

(٣) إذا كان : (٥ ، ٣س - ٧) = (ص + ١ ، -٥) فإن : س + ص = ...

(٤) إذا كان : (س + ٥ ، ٨) = (١ ، ٦ص + س) فإن : ص = ...

(٥) إذا كان : ن(س) = ٥ ، ن(س × ص) = ١٥ فإن : ن(ص) = ...

(٦) إذا كان : س × ص = {(١ ، ٥) ، (١ ، ٧) ، (٢ ، ٥) ، (٢ ، ٧) ، (٣ ، ٥) ، (٣ ، ٧)}
فإن : س = ... ، ص = ...

(٧) إذا كانت : د دالة حيث د : س ← ص فإن : س تسمى .... ، ص تسمى ....

(٨) إذا كانت : د دالة من المجموعة س إلى المجموعة ص فإن : مدى الدالة د يكون ⊂ ....

(٩) إذا كانت : د (س) = ٥ س - ٧ فإن : د (٣) = ...

(١٠) إذا كانت : د (س) = ٦ س فإن : د (٢) + د (-٢) = ...

(١١) إذا كانت : د (س) = ٢ س + ب ، د (٤) = ١٢ فإن : ب = ...

(١٢) إذا كانت : د (س) = س - ٦ وكان : $\frac{1}{2}$ د (أ) = -٢ فإن : أ = ...

(١٣) إذا كانت : س = {١ ، ٣ ، ٥} وكانت د : س ← ع حيث د (س) = ٢ س + ١
فإن : مدى د = ...

(١٤) الدالة د : ع ← ع حيث د (س) = ٣ س يمثلها خط مستقيم يمر بالنقطة (-٤ ، ....)

(١٥) الدالة الخطية المعرفة بالقاعدة : د (س) = س + ٧ يمثلها بيانيًا خط مستقيم يقطع محور السينات في النقطة ....

(١٦) الدالـة الخطيـة المعرفة بالقاعدة : د (س) = ٢ س - ١ يمثلها بيانيًا خط مسـتقيم يقطع محور الصادات في النقطة ....

(١٧) الدالـة الخطيـة المعرفة بالقاعدة : د (س) = ٢ - ٣ س يمثلها خط مسـتقيم يقطع محور الصادات في النقطة ....

(١٨) إذا كانت النقطة (أ ، ٣) تقع على الخط المستقيم الممثل للدالة د : ع ← ع
حيث د (س) = ٤ س - ٥ فإن : أ = ...

(١٩) إذا كانت الدالة د حيث د (س) = ٣ س - ١ يمثلها بيانيًا مستقيم يمر بالنقطة (أ ، ٢)
فإن : أ = ...

(٢٠) إذا كانت (٢ ، -٦) ∈ بيان الدالة د حيث د (س) = ك س + ٨ فإن : ك = ...

ثانيا: الأسئلة المقالية

س ١) إذا كانت : س = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ }
وكانت ع علاقة على س حيث " أ ع ب " تعني أن
" أ ضعف ب " لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص س، أ ≠ ب

١) اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي
٢) هل (٠ ، ٠) ∈ ع
٣) هل ٢ ع ٤
٤) أوجد س إذا كان ٦ ع س

س ٢) إذا كانت : س = { ١٣ ، ١٤ ، ٤٣ ، ٨٤ }
وكانت ع علاقة على س حيث " أ ع ب " تعني أن
"العدد أ له نفس رقم آحاد العدد ب" لكل أ ∈ س ، ب ∈ س اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي

س ٣) إذا كانت : س = { ١ ، ٢ ، ٣ }

ص = { ١ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٥}$ }

وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث " ٩ ع ب" تعني ان "العدد ٩ هو المعكوس الضربي للعدد ب" لكل ٩ ∋ س ، ب ∋ ص اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي وآخر بياني

هل ع دالة ؟ ولماذا ؟

س ٤) إذا كانت : س = { ١ ، ٣ ، ٤ ، ٥ }

ص = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ }

وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث " ٩ ع ب" تعني ان " ٩ + ب = ٧" لكل ٩ ∋ س ، ب ∋ ص ، اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي وآخر بياني

بين أن ع دالة واكتب مجالها ومداها ؟

س ٥) إذا كانت : س = { ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ }

ص = { ٩ ∋ ط : ١٠ ⩽ ٩ ⩽ ٥٠ }

وكانت ع علاقة من س إلى ص كالآتي :

ع = { (٣ ، ١٥) ، (٥ ، ٢٥) ، (٧ ، ٣٥) ، (٩ ، ٤٥) }

١) ما مدى العلاقة ع ؟

٢) اكتب قاعدة للعلاقة ع

س٦) مثل بيانياً الدالة ١) د : د(س)= ٥ س

٢) د(س) = س٢ -٢ حيث س∋ [-٣ ، ٣]

٣) د(س) = س٢ – ٤س + ٥ : س ∋ [٠ ، ٥]

أنت أقوى مما تتخيل تذكير نفسك بقدراتك يمكن أن يكون المحفز الأقوي

الوحدة الثانية : النسبة والتناسب والتغير الطردي والتغير العكسي

النسبة والتناسب

أولاً : النسبة

هي مقارنة بين كميتين أو أكثر

مثـال : إذا كان مع محمد ٣ جنيهات ومع أحمد ٥ جنيهات
فإن نسبة ما مع محمد إلى ما مع أحمد ٣ : ٥ أو $\frac{٣}{٥}$

وعموماً : إذا كان ؋ ، ب عددين حقيقين فإن النسبة بين العدد ؋ والعدد ب تكتب بإحدى الصورتين ؋ : ب أو $\frac{؋}{ب}$
وتقرأ " ؋ إلى ب "
ويسمى ؋ مقدم النسبة ، ويسمى ب تالي النسبة ،
؋ ، ب معاً حدي النسبة

خواص النسبة :

١) قيمة النسبة لا تتغير إذا ضرب حداها في أو قسما على عدد حقيقي لا يساوي الصفر

مثـال : $\frac{١}{٢} = \frac{١ \times ٤}{٢ \times ٤} = \frac{٤}{٨}$

$\frac{٤}{٦} = \frac{٤ \div ٢}{٦ \div ٢} = \frac{٢}{٣}$

٢) قيمة النسبة تتغير إذا أضيف غلى حديها أو طرح منها عدد حقيقي لا يساوي الصفر

مثـال : $\frac{٣}{٤} \neq \frac{٣ + ٢}{٤ + ٢}$

$\frac{٣}{٤} \neq \frac{٥}{٦}$

ثانياً : التناسب

هو تساوي نسبتين أو أكثر

مثـال : $\frac{١}{٢} = \frac{٤}{٨}$

وعموماً : إذا كان $\frac{؋}{ب} = \frac{جـ}{د}$ فإن الكميات ؋ ، ب ، جـ ، د تكون متناسبة **والعكس :** إذا كانت : ؋ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة فإن : $\frac{؋}{ب} = \frac{جـ}{د}$

ويسمى ؋ بالأول المتناسب ، ب بالثاني المتناسب ، جـ بالثالث المتناسب ، د بالرابع المتناسب
كما يسمى :
؋ ، د بطرفي التناسب ، ب ، جـ بوسطي التناسب

خواص التناسب :

١) حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين
إذا كان: $\frac{؋}{ب} = \frac{جـ}{د}$ فإن : ؋ × د = ب × جـ

مثـال : أوجد الثالث المتناسب للكميات : ٣ ، ٤ ، ٢٠

الحل : نفرض أن الثالث المتناسب هو س
∴ الكميات ٣ ، ٤ ، س ، ٢٠ متناسبة
∴ $\frac{٣}{٤} = \frac{س}{٢٠}$

$س = \frac{٣ \times ٢٠}{٤} = \frac{٦٠}{٤} = ١٥$

مثـال : أوجد الرابع المتناسب للكميات :
١٨ ؋^{٢} ب ، ١٢ ؋ ب^{٢} ، ٢١ ؋ ب

الحل : نفرض أن الرابع المتناسب هو س
∴ الكميات ١٨ ؋^{٢} ب ، ١٢ ؋ ب^{٢} ، ٢١ ؋ ب ، س متناسبة

∴ $\frac{١٨ ؋^{٢} ب}{١٢ ؋ ب^{٢}} = \frac{٢١ ؋ ب}{س}$

$س = \frac{١٢ ؋ ب^{٢} \times ٢١ ؋ ب}{١٨ ؋^{٢} ب} = \frac{٢٥٢ ؋^{٢} ب^{٣}}{١٨ ؋^{٢} ب} = ١٤ ب^{٢}$

اوجد الثاني المتناسب للاعداد ٢ ، ٨ ، ١٢

الحل : الاعداد ٢ ، س ، ٨ ، ١٢

$\frac{٢}{س} = \frac{٨}{١٢}$ ، $س = \frac{٢ \times ١٢}{٨} = ٣$

تمارين

س ١) أكمل ما يأتي :

(١) التناسب هو ....

(٢) إذا كان : أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة فإن : جـ يسمى ....

(٣) إذا كانت الكميات : أ ، ب ، جـ ، د متناسبة فإن : $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ = ...

(٤) الرابع المتناسب للأعداد ٤ ، ١٢ ، ١٦ هو ....

(٥) الثاني المتناسب للأعداد ٢ ، ٤ ، ٦ هو ....

(٦) الثالث المتناسب للأعداد ٨ ، ٦ ، ١٢ هو ....

(٧) الأول المتناسب للأعداد ٥ ، ٢٧ ، ٤٥ هو ....

(٨) إذا كانت : ٣ ، ٤ ، س ، ١١ أربع كميات متناسبة فإن : س = ...

(٩) إذا كانت : ٣ ، أ − ١ ، أ + ١ ، ٥ متناسبة فإن : أ = ...

(١٠) قسم مبلغ بين شخصين بنسبة ٢ : ٣ فإذا كان نصيب أولهما ٣٠ جنيهًا فإن نصيب الآخر = ... جنيهًا.

(١١) إذا كان : ٧ س = ٣ ص فإن : $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ = ...

(١٢) إذا كان : ٥ أ − ٤ ب = ٠ فإن : $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ = ...

(١٣) إذا كان : $\frac{\text{٥ أ} - \text{٧ ب}}{\text{٨ أ} + \text{١١ ب}}$ = ٠ فإن : $\frac{\text{ب}}{\text{أ}}$ = ...

(١٤) إذا كان : ٩ $\text{أ}^{٢}$ − ٢٥ $\text{ب}^{٢}$ = ٠ حيث أ ∈ ح_{+} ، ب ∈ ح_{+} فإن : $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ = ...

(١٥) إذا كان : $\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{٢}{٥}$ فإن : $\frac{\text{٢ س}}{\text{٢ ص}}$ = ...

(١٦) إذا كان : $\frac{\text{أ}}{٢} = \frac{\text{ب}}{٣}$ فإن : $\frac{\text{٢ أ}}{\text{٣ ب}}$ = ...

اوجد الرابع المتناسب للاعداد ٤ ، ٨ ، ٨

الواجب المنزلي

س ١) أكمل ما يأتي :

١) الأول المتناسب للأعداد : ٢ ، ٥ ، ١٠ هو ....

٢) الثاني المتناسب للأعداد : ٨ ، ١٦ ، ١٢ هو ....

٣) الثالث المتناسب للأعداد : ٢ ، ٣ ، ٦ هو ....

٤) الرابع المتناسب للأعداد : ٤ ، ١٢ ، ١٦ هو ....

٥) إذا كانت : ٣ ، ٥ ، س ، ١٥ أربع كميات متناسبة

فإن : س = ...

٦) إذا كان : ٣ س = ٥ ص فإن : $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ = ...

٧) إذا كان : ٧ س = ١١ ص فإن : $\frac{\text{١١ ص}}{\text{٧ س}}$ = ...

٨) إذا كان : ٣ أ = ٨ ب فإن : $\frac{\text{٢ أ}}{\text{ب}}$ = ...

٩) إذا كان : ٢ س = ٧ ص فإن : $\left(\frac{\text{س}}{\text{ص}}\right)^{-١}$ = ...

١٠) إذا كانت : ٥ أ ، ٢ ، ٣ ب ، ٧ أربع كميات متناسبة

فإن : $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ = ...

تابع النسبة والتناسب

مثال : أوجد العدد الحقيقي الذي إذا طرح من حدي النسبة $\frac{\text{٥}}{\text{٦}}$ أصبحت $\frac{\text{٣}}{\text{٢}}$

الحل : نفرض أن العدد المطلوب = س

∴ $\frac{\text{٥ - س}}{\text{٦ - س}} = \frac{\text{٣}}{\text{٢}}$

١٠ − ٢ س = ١٨ − ٣ س

٣ س − ٢ س = ١٨ − ١٠

س = ٨ العدد هو ٨

٢) إذا كان : أ × د = ب × جـ فإن : $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}}$

(لا أرجع فاضي)

مثال : إذا كان : ٢ س^{٢} − ٦ ص^{٢} = س ص

فأوجد : $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$

الحل : ∵ ٢ س^{٢} − ٦ ص^{٢} = س ص

∴ ٢ س^{٢} - س ص − ٦ ص^{٢} = ٠

(٢ س + ٣ ص)(س − ٢ ص) = ٠

٢ س + ٣ ص = ٠	س − ٢ ص = ٠
٢ س = - ٣ ص	س = ٢ ص
$\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{\text{- ٣}}{\text{٢}}$	$\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{\text{٢}}{\text{١}}$

مثال : إذا كان : ٤ س − ٣ ص : ٢ س + ص = ٤ : ٧

فأوجد في أبسط صورة : س : ص

الحل : ∵ $\frac{\text{٤ س − ٣ ص}}{\text{٢ س + ص}} = \frac{\text{٤}}{\text{٧}}$

∴ ٢٨ س − ٢١ ص = ٨ س + ٤ ص

٢٨ س − ٨ س = ٤ ص + ٢١ ص

٢٠ س = ٢٥ ص

$\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{\text{٢٥}}{\text{٢٠}} = \frac{\text{٥}}{\text{٤}}$

٣) إذا كان : $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}}$ فإن : $\frac{\text{أ}}{\text{جـ}} = \frac{\text{ب}}{\text{د}}$

مثال : إذا كان : $\frac{\text{أ}}{\text{٤}} = \frac{\text{ب}}{\text{٣}}$ فإن : $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{٤}}{\text{٣}}$

مثال : أوجد العدد الذي إذا أضيف لكل من الأعداد ١ ، ١٣ ، ٧ ، ٣١ حصلنا على أعداد متناسبة

الحل : نفرض أن العدد هو س

∴ ١ + س ، ١٣ + س، ٧ + س، ٣١ + س متناسبة

∴ $\frac{\text{١ + س}}{\text{١٣ + س}} = \frac{\text{٧ + س}}{\text{٣١ + س}}$

(س + ١)(س + ٣١) = (س + ٧)(س + ١٣)

س^{٢} + ٣٢ س + ٣١ = س^{٢} + ٢٠ س + ٩١

١٢ س = ٦٠ ∴ س = ٥ ∴ العدد هو ٥

مثال : إذا كان (٢ س + ٥) : (٣ س − ٣) = ٥ : ٤ فأوجد قيمة س

الحل : ∴ $\frac{\text{٢ س + ٥}}{\text{٣ س − ٣}} = \frac{\text{٥}}{\text{٤}}$

٨ س + ٢٠ = ١٥ س − ١٥

٢٠ + ١٥ = ١٥ س − ٨ س

٣٥ = ٧ س

س = $\frac{\text{٣٥}}{\text{٧}}$ = ٥

تمارين

١) إذا كان : ٤ س^{٢} − ١٢ س ص + ٩ ص^{٢} = ٠

فإن : $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ = ...

٢) إذا كان : $\frac{\text{أ}}{\text{٣}} = \frac{\text{ب}}{\text{٥}}$ فإن : $\frac{\text{ب}}{\text{أ}}$ = ...

٣) إذا كان : $\frac{\text{س + ٢ ص}}{\text{س - ص}} = \frac{\text{٢}}{\text{٣}}$

فإن : $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ = ...

٤) أوجد العدد الذي إذا أضيف إلى كل من الأعداد ٣ ، ٥ ، ٨ ، ١٢ فإنها تكون متناسبة

٥) أوجد العدد الذي إذا أضيف إلى حدي النسبة ٧ : ١١ فإنها تصبح ٢ : ٣

٦) إذا كان (س – ٥) : (٥ س + ٣) = ٢ : ٣ فأوجد قيمة س

٧) إذا كان : $\frac{\text{س} + ٣\,\text{ص}}{٢\,\text{س} - \text{ص}} = \frac{٤}{٣}$

فأوجد : $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$

الواجب المنزلي

١) إذا كان : $\frac{٢\,\text{س} + ٣}{٢\,\text{س} - ٣} = \frac{٢\,\text{ص} + ٥}{٢\,\text{ص} - ٥}$

فأثبت أن : $\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{٣}{٥}$

٢) إذا كان : (٢س – ٣) : (س – ٥) = ١ : ٤ فأوجد قيمة س

عندما يأتي اليأس، تذكر أن النجاح يبدأ من داخلك. أنت السبب

تابع خواص التناسب

٤) إذا كان: $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د}$

فإن: أ = ج م ، ب = د م حيث م ثابت ≠ صفر

مثال: إذا كان: $\frac{أ}{ب} = \frac{٣}{٥}$ فأوجد قيمة $\frac{٢٠أ - ٧ب}{١٥أ + ب}$

الحل: ∵ $\frac{أ}{ب} = \frac{٣}{٥}$ ∴ أ = ٣م ، ب = ٥م

∴ $\frac{٢٠أ - ٧ب}{١٥أ + ب} = \frac{٦٠م - ٣٥م}{٤٥م + ٥م} = \frac{٢٥م}{٥٠م} = \frac{١}{٢}$

مثال: إذا كان: $\frac{س}{ص} = \frac{٢}{٥}$ فأثبت أن: (٢س + ص) ، (س + ٢ص) ، ١٢ ، ١٦ كميات متناسبة

الحل: لحل هذا السؤال نثبت أن: قيمة $\frac{٢س + ص}{س + ٢ص} = \frac{١٢}{١٦}$

∵ $\frac{س}{ص} = \frac{٢}{٥}$ ∴ س = ٢م ، ص = ٥م

∴ $\frac{٢س + ص}{س + ٢ص} = \frac{٤م + ٥م}{٢م + ١٠م} = \frac{٩م}{١٢م} = \frac{٣}{٤}$

∵ $\frac{١٢}{١٦} = \frac{٣}{٤}$

∴ (٢س + ص) ، (س + ٢ص) ، ١٢ ، ١٦ كميات متناسبة

مثال: عددان صحيحان النسبة بينهما ٢ : ٥ وإذا طرح من العدد الأول ٢ وأضيف للثاني ١ صارت النسبة بينهما ١ : ٤ وجد العددين

الحل: نفرض أن العددين هما ٢م ، ٥م

∴ $\frac{٢م - ٢}{٥م + ١} = \frac{١}{٤}$

٨م − ٨ = ٥م + ١

٨م − ٥م = ١ + ٨

٣م = ٩

م = $\frac{٩}{٣}$ = ٣

العددان هما: ٢ × ٣ = ٦ ، ٥ × ٣ = ١٥

ملحوظة هامة: إذا كانت أ ، ب ، ج ، د كميات متناسبة

وفرضنا أن: $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د} = م$

فإن: أ = ب م ، ج = د م

مثال: إذا كانت أ ، ب ، ج ، د كميات متناسبة

فأثبت أن: $\frac{أ + ج}{ب + د} = \frac{أ^٢ + ج^٢}{أب + جد}$

الحل: نفرض أن: $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د} = م$

∴ أ = ب م ، ج = د م

الطرف الأيمن = $\frac{أ + ج}{ب + د} = \frac{ب م + د م}{ب + د} = \frac{م(ب + د)}{ب + د}$

= م

الطرف الأيسر = $\frac{أ^٢ + ج^٢}{أب + جد} = \frac{(ب م)^٢ + (د م)^٢}{(ب م)ب + (د م)د} = \frac{ب^٢م^٢ + د^٢م^٢}{ب^٢م + د^٢م} = \frac{م^٢(ب^٢ + د^٢)}{م(ب^٢ + د^٢)} = م$

∴ الطرفان المتساويان

مثال: إذا كانت أ ، ب ، ج ، د، هـ ، و كميات متناسبة

فأثبت أن: $\sqrt{\frac{أ^٢ + ج^٢ + هـ^٢}{ب^٢ + د^٢ + و^٢}} = \frac{أ}{ب}$

الحل: نفرض أن: $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د} = \frac{هـ}{و} = م$

∴ أ = ب م ، ج = د م ، هـ = و م

الطرف الأيمن = $\sqrt{\frac{أ^٢ + ج^٢ + هـ^٢}{ب^٢ + د^٢ + و^٢}}$

$= \sqrt{\frac{(ب م)^٢ + (د م)^٢ + (و م)^٢}{ب^٢ + د^٢ + و^٢}}$

$= \sqrt{\frac{ب^٢م^٢ + د^٢م^٢ + و^٢م^٢}{ب^٢ + د^٢ + و^٢}}$

$= \sqrt{\frac{م^٢(ب^٢ + د^٢ + و^٢)}{ب^٢ + د^٢ + و^٢}} = \sqrt{م^٢} = م$

الطرف الأيسر = $\frac{أ}{ب} = \frac{ب م}{ب} = م$

∴ الطرفان المتساويان

تمارين

س١) إذا كان : $\frac{س}{ص} = \frac{٢}{٣}$ فأوجد قيمة : $\frac{٣ س + ٢ ص}{٦ ص - س}$

س٢) إذا كان : $\frac{س}{ص} = \frac{٣}{٥}$ فأثبت أن :

(٢٠ س - ٧ ص) ، (١٥ س + ص) ، ١٢ ، ٢٤ كميات متناسبة

س٣) إذا كانت ٢ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة

فأثبت أن : $\frac{٥ ٢ - ٢ جـ}{٥ ب - ٢ د} = \frac{٤ ٢ + ٣ جـ}{٤ ب + ٣ د}$

الواجب المنزلي

س١) إذا كان : $\frac{س}{ص} = \frac{٣}{٥}$ فأوجد قيمة :

٧ س + ٩ ص : ٤ س + ٢ ص

س٢) إذا كان : $\frac{٢ + ب}{ب} = \frac{جـ + د}{د}$

فأثبت أن : ٢ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة

س ٣) إذا كانت ٢ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة

فأثبت أن : $\frac{٢ جـ}{ب د} = \left(\frac{٢ - جـ}{ب - د}\right)^٢$

تابع خواص التناسب

٥) $\frac{\text{مجموع المقدمات}}{\text{مجموع التوالي}}$ = إحدى النسب

إذا كان : $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د} = \frac{هـ}{و}$

وكانت : $م_1$ ، $م_2$ ، $م_3$ أعداد حقيقية لا تساوي الصفر

فإن : $\frac{م_1 أ + م_2 جـ + م_3 هـ}{م_1 ب + م_2 د + م_3 و}$ = إحدى النسب

مثـال : إذا كانت أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة

فأثبت أن : $\frac{٢أ + ٣جـ}{٢ب + ٣د} = \frac{٧أ - ٥جـ}{٧ب - ٥د}$

الحل : ∵ أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة

∴ $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$

بضرب حدي النسبة الأولى في ٢ والنسبة الثانية في ٣ وتطبيق $\frac{\text{مجموع المقدمات}}{\text{مجموع التوالي}}$ = إحدى النسب

∴ $\frac{٢أ + ٣جـ}{٢ب + ٣د}$ = إحدى النسب ——— (١)

بضرب حدي النسبة الأولى في ٧ والنسبة الثانية في - ٥ وتطبيق $\frac{\text{مجموع المقدمات}}{\text{مجموع التوالي}}$ = إحدى النسب

∴ $\frac{٧أ - ٥جـ}{٧ب - ٥د}$ = إحدى النسب ——— (٢)

من (١) و (٢)

$\frac{٢أ + ٣جـ}{٢ب + ٣د} = \frac{٧أ - ٥جـ}{٧ب - ٥د}$

∴ $\frac{٢أ + ٣جـ}{٧أ - ٥جـ} = \frac{٢ب + ٣د}{٧ب - ٥د}$

مثـال : إذا كان :

$\frac{أ + ٤ب}{س + ٢ص} = \frac{٤ب + ٧جـ}{٢ص + ٥ع} = \frac{٧جـ + أ}{٥ع + س}$

فأثبت أن : $\frac{أ}{٢ب} = \frac{س}{ص}$

الحل : بضرب حدي النسبة الثانية في (- ١) وجمع مقدمات وتوالي النسب الثلاث :

∴ $\frac{أ + ٤ب - ٤ب - ٧جـ + ٧جـ + أ}{س + ٢ص - ٢ص - ٥ع + ٥ع + س} = \frac{٢أ}{٢س} = \frac{أ}{س}$ = إحدى النسب ——— (١)

بضرب حدي النسبة الثالثة في (- ١) وجمع مقدمات وتوالي النسب الثلاث :

∴ $\frac{أ + ٤ب + ٤ب + ٧جـ - ٧جـ - أ}{س + ٢ص + ٢ص + ٥ع - ٥ع - س} = \frac{٨ب}{٤ص} = \frac{٢ب}{ص}$ = إحدى النسب ——— (١)

من (١) و (٢) $\frac{أ}{س} = \frac{٢ب}{ص}$

∴ $\frac{أ}{٢ب} = \frac{س}{ص}$

تمارين

س ١) إذا كان : $\frac{س}{أ - ٢ب} = \frac{ص}{ب - ٢جـ} = \frac{ع}{جـ - ٢أ}$

فأثبت أن : $\frac{س + ٢ص - ع}{٣أ - ٥جـ} = \frac{ص + ٢ع}{ب - ٤أ}$

٢) إذا كان

$$\frac{\text{س} + \text{ص}}{٥} = \frac{\text{ص} + \text{ع}}{٣} = \frac{\text{س} + \text{ع}}{٦}$$

أثبت أن : $\frac{\text{س} - \text{ع}}{٢} = \frac{\text{س} + \text{ص} + \text{ع}}{٧}$

الواجب المنزلي

س١) إذا كان : $\frac{\text{س}}{٣} = \frac{\text{ص}}{٤} = \frac{\text{ع}}{٥}$

فأثبت أن : $\frac{٢\,\text{ص} - \text{ع}}{٣\,\text{س} - ٢\,\text{ص} + \text{ع}} = \frac{١}{٢}$

كل دقيقة تمضي في المذاكرة هي استثمار في نجاحك المستقبلي اجعلها تستحق

التناسب المتسلسل

يقال أن الكميات أ ، ب ، جـ في تناسب متسلسل

إذا كان : $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{جـ}}$ وفي هذا التناسب يسمى :

أ بالأول المتناسب ، جـ بالثالث المتناسب

، أما ب فتسمى بالوسط المتناسب بين أ ، جـ

ب = $\pm\sqrt{\text{أ جـ}}$ أي أن :

الوسط المتناسب بين كميتين = $\pm\sqrt{\text{حاصل ضرب الكميتين}}$

الأول المتناسب = $\frac{\text{الوسط} \times \text{الوسط}}{\text{الثالث}}$

الثالث المتناسب = $\frac{\text{الوسط} \times \text{الوسط}}{\text{الأول}}$

مثال : أوجد الوسط المتناسب بين كل من الكميتين :

١) ٥ ، ١٠ ٢) $ل^٢$ ، $م^٢$

الحل :

١) الوسط المتناسب = $\pm\sqrt{٥ \times ٢٠} = \pm\sqrt{١٠٠} = \pm ١٠$

٢) الوسط المتناسب = $\pm\sqrt{ل^٢ \times م^٢} = \pm ل م$

مثال : أوجد الأول المتناسب لكل من الكميتين :

١) ٨ ، ١٦ ٢) ١٨، ٢٧

الحل :

١) الأول المتناسب = $\frac{٨ \times ٨}{١٦} = ٤$

٢) الأول المتناسب = $\frac{١٨ \times ١٨}{٢٧} = ١٢$

مثال : أوجد الثالث المتناسب لكل من الكميتين :

١) ٤، ٦ ٢) ١٢ ، ١٨

الحل :

١) الثالث المتناسب = $\frac{٦ \times ٦}{٤} = ٩$

٢) الثالث المتناسب = $\frac{١٨ \times ١٨}{١٢} = ٩$

تمارين

س١) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

① الثالث المتناسب للعددين ٩ ، -١٢ هو ....

(أ) -١٦ (ب) ٨ (جـ) ١٦ (د) ١٠٨

② الوسط المتناسب بين أ ، ب هو ....

(أ) أ ب (ب) $\sqrt{\text{أ ب}}$ (جـ) $-\sqrt{\text{أ ب}}$ (د) $\pm\sqrt{\text{أ ب}}$

③ إذا كانت : ل ، م ، ع في تناسب متسلسل فإن : ل = ...

(أ) $\pm\sqrt{\text{م ع}}$ (ب) م ع (جـ) $\frac{\text{م}}{\text{ع}}$ (د) $\frac{\text{م}^٢}{\text{ع}}$

④ إذا كان العدد ٩ هو الوسط المتناسب للعددين ٣ ، ك

فإن : ك = ...

(أ) ١٨ (ب) ٨١ (جـ) ٢٧ (د) ٩

⑤ إذا كان : $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{حـ}} = \frac{\text{حـ}}{٥} = ٢$ فإن : أ = ...

(أ) ٥×٢^٣ (ب) ٤٠ (جـ) ١٠ (د) ٢×٥^٣

⑥ إذا كانت : $٦ \text{أ}^٢ \text{ب}^٢$ ، ٣ أ ب ، حـ كميات متناسبة فإن : حـ = ...

(أ) -٣ (ب) ٣ أ ب (جـ) $\frac{٣}{٢}$ (د) $\frac{٢}{٣}$

⑦ إذا كان : أ ، ٢ ، ٤ ، ب في تناسب متسلسل

فإن : أ + ب = ...

(أ) ٨ (ب) ١ (جـ) ٩ (د) ٧

س٢) أوجد الوسط المتناسب بين :

١) ٣ ، ٢٧

٢) ٩ ، ٢٥

س٣) أوجد الأول المتناسب:

١) ٦ ، ١٢

٢) ٩ ، ٢٧

س٤) أوجد الثالث المتناسب:

١) ٦ ، ١٢

٢) ١٠ ، ٢٠

الواجب المنزلي :

س١) أوجد الوسط المتناسب بين :

١) ٢ م ، ٨ م ب؟

٢) ــ ٢ ، ــ ٨

س٢) أوجد الأول المتناسب:

١) ١٥ ، ٤٥

٢) ٦ ، ٩

س٣) أوجد الثالث المتناسب:

١) ٥ ، ١٠

٢) ٤ ، ١٢

تابع التناسب المتسلسل

ملحوظه هامة : ـ

إذا كانت أ ، ب ، ج ، د في تناسب متسلسل

وفرضنا أن : $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{ج} = \frac{ج}{د} = م$

فإن : ج = د م ، ب = د م^{٢} ، أ = د م^{٣}

مثال : إذا كانت أ ، ب ، ج في تناسب متسلسل

فأثبت أن : $\frac{٤أ^{٢} - ٣ب^{٢}}{٤ب^{٢} - ٣ج^{٢}} = \frac{أ}{ج}$

الحل : نفرض أن : $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{ج} = م$

∴ ب = ج م ، أ = ج م^{٢}

الطرف الأيمن = $\frac{٤أ^{٢} - ٣ب^{٢}}{٤ب^{٢} - ٣ج^{٢}} = \frac{٤(ج م^{٢})^{٢} - ٣(ج م)^{٢}}{٤(ج م)^{٢} - ٣ج^{٢}}$

$= \frac{٤ج^{٢}م^{٤} - ٣ج^{٢}م^{٢}}{٤ج^{٢}م^{٢} - ٣ج^{٢}} = \frac{ج^{٢}م^{٢}(٤م^{٢} - ٣)}{ج^{٢}(٤م^{٢} - ٣)} = م^{٢}$

الطرف الأيسر = $\frac{أ}{ج} = \frac{ج م^{٢}}{ج} = م^{٢}$ ∴ الطرفان المتساويان

مثال : إذا كانت ب وسطاً متناسبا بين أ ، ج :

فأثبت أن : $\frac{أ - ب}{أ} = \frac{أ - ج}{أ + ب}$

الحل : نفرض أن : $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{ج} = م$

∴ ب = ج م ، أ = ج م^{٢}

الطرف الأيمن = $\frac{أ - ب}{أ} = \frac{ج م^{٢} - ج م}{ج م^{٢}} = \frac{ج م (م - ١)}{ج م^{٢}}$

$= \frac{م - ١}{م}$

الطرف الأيسر = $\frac{أ - ج}{أ + ب} = \frac{ج م^{٢} - ج}{ج م^{٢} + ج م} = \frac{ج (م^{٢} - ١)}{ج م (م + ١)}$

$= \frac{ج (م - ١)(م + ١)}{ج م (م + ١)} = \frac{م - ١}{م}$ ∴ الطرفان المتساويان

مثال : إذا كانت أ ، ٢ب ، ٣ج ، ٤د في تناسب متسلسل فأثبت أن :

(٢ب − ٣ج) وسط متناسب بين (أ − ٢ب)،(٣ج − ٤د)

الحل : بفرض أن : $\frac{أ}{٢ب} = \frac{٢ب}{٣ج} = \frac{٣ج}{٤د} = م$

فإن : ٣ج = ٤د م ، ٢ب = ٤د م^{٢} ، أ = ٤د م^{٣}

المطلوب اثبات أن

$(٢ب - ٣ج)^{٢} = (أ - ٢ب)(٣ج - ٤د)$

الطرف الأيمن = $(٢ب - ٣ج)^{٢} = (٤د م^{٢} - ٤د م)^{٢}$

$= [٤د م (م - ١)]^{٢} = ١٦د^{٢}م^{٢}(م - ١)^{٢}$

الطرف الأيسر = $(أ - ٢ب)(٣ج - ٤د)$

$= (٤د م^{٣} - ٤د م^{٢})(٤د م - ٤د)$

$= [٤د م^{٢}(م - ١)] \times [٤د (م - ١)]$

$= ١٦د^{٢}م^{٢}(م - ١)^{٢}$

∴ $(٢ب - ٣ج)^{٢} = (أ - ٢ب)(٣ج - ٤د)$

(٢ب − ٣ج) وسط متناسب بين (أ − ٢ب)،(٣ج − ٤د)

تمارين

س١) إذا كانت ب وسطاً متناسباً بين أ ، ج فأثبت أن :

$\frac{أ^{٢} + ب^{٢}}{ب^{٢} + ج^{٢}} = \frac{أ}{ج}$

س٢) إذا كانت ٩ ، ب ، جـ ، د في تناسب متسلسل

فأثبت أن : $\frac{\text{٩} + \text{د}}{\text{ب} - \text{جـ} + \text{د}} = \frac{\text{٩} - \text{جـ}}{\text{ب} - \text{جـ}}$

٣) إذا كان : ٩ ، ب ، جـ ، د في تناسب متسلسل

أثبت أن : $\frac{\text{٩ ب} - \text{د جـ}}{\text{ب}^{٢} - \text{جـ}^{٢}} = \frac{\text{٩} + \text{جـ}}{\text{ب}}$

الواجب المنزلي

س١) إ ذا كانت ب وسطا متناسباً بين ٩ ، جـ فأثبت أن :

$\frac{\text{٢ جـ}^{٢} - \text{٣ ب}^{٢}}{\text{٢ ب}^{٢} - \text{٣ ٩}^{٢}} = \frac{\text{جـ}}{\text{٩}}$

س ٢) إ ذا كانت ب وسطا متناسباً بين ٩ ، جـ فأثبت أن :

$\frac{\text{٩} + \text{ب} + \text{جـ}}{\text{٩}^{-١} + \text{ب}^{-١} + \text{جـ}^{-١}} = \text{ب}^{٢}$

س ٣) إ ذا كان : ٣ ، ل ، ١٢ ، م في تناسب متسلسل
أوجد قيمة : ل ، م

كل خطوة صغيرة في المذاكرة هي قفزة كبيرة نحو النجاح

التغير الطردي والتغير العكسي

أولاً : التغير الطردي

يقال إن ص تتغير طردياً مع س وتكتب ص ∝ س

إذا كان : ص ∝ س : ص = م س (أي أن : $م = \frac{ص}{س}$: م ≠ صفر)

****

والعكس صحيح إذا كان : ص ∝ س فإن :

١) ص = م س (يستخدم في إيجاد العلاقة بين ص ، س)

٢) $\frac{ص_1}{ص_2} = \frac{س_1}{س_2}$ (يستخدم في ايجاد قيمة مجهولة)

مثـال : إذا كان ص ∝ س وكانت ص = ٢٠ عند س = ٧ فاوجد ص عندما س = ١٤

الحل : ∵ ص ∝ س ∴ $\frac{ص_1}{ص_2} = \frac{س_1}{س_2}$

: $ص_1 = ٢٠$ ، $س_1 = ٧$ ، $ص_2 = ؟$ ، $س_2 = ١٤$

$\frac{٢٠}{ص_2} = \frac{٧}{١٤}$ ∴ $ص_2 = \frac{٢٠ \times ١٤}{٧} = ٤٠$

مثـال : إذا كان س ، ص متغيرين حيث ص ∝ المعكوس الضربي للمقدار $\frac{١}{س^٣}$ ، وأخذت ص القيمة ١٨ عندما س = ٢ فأوجد العلاقة بين س ، ص

الحل : ∵ ص ∝ المعكوس الضربي للمقدار $\frac{١}{س^٣}$

∴ ص ∝ $س^٣$

∴ ص = م $س^٣$ ∵ ص = ١٨ عند س = ٢

١٨ = م × $(٢)^٣$ ، $م = \frac{١٨}{٨} = \frac{٩}{٤}$

∴ العلاقة هي : ص = $\frac{٩}{٤}$ $س^٣$

مثـال : إذا كان $أ^٢ + ٤ ب^٢ = ٤ أ ب$ فأثبت أن : أ ∝ ب

الحل : ∵ $أ^٢ + ٤ ب^٢ = ٤ أ ب$

∴ $أ^٢ - ٤ أ ب + ٤ ب^٢ = ٠$

$(أ - ٢ ب)^٢ = ٠$

أ − ٢ ب = ٠ أ = ٢ ب ∴ أ ∝ ب

ملحوظة :
في التمثيل البياني للعلاقة الطردية عبارة عن خط مستقيم يمر بنقطة الأصل (٠ ، ٠)

تمارين

س ١) إذا كانت ص ∝ س وكانت ص = ٥ عندما س = ٣ أوجد قيمة ص عندما س = ١٥

س ٢) إذا كانت ص ∝ س وكانت ص = ٧ عندما س = ٤ أوجد العلاقة بين ص ، س

س٣) اذا كانت س = ل + ٩ وكانت ل $\propto$ ص فاوجد العلاقة بين ص ، س علما بأن س = ٢٤ ، عندما ص = ٥ ثم اوجد قيمة ص عندما ل = ١٢

س٤) اذا كان (٢١ س – ص) ÷ (٧س – ع) = ص÷ع فاثبت أن ص $\propto$ ع

الواجب المنزلي :

١) اذا كانت س $\propto$ ص فإن س = ...

٢) اذا كانت ص $\propto$ س فإن $\text{س}_1 \div \text{س}_2$ = ... ÷ .....

ب) اذا كانت ص $\propto \text{س}^3$ وكانت ص = ٦٤ عندما س = ٢ اوجد العلاقة بين س ، ص ثم اوجد قيمة ص عندما س = ٠,٥

ثانياً : التغير العكسي

يقال إن ص تتغير عكسياً مع س وتكتب ص $\propto \frac{1}{\text{س}}$

إذا كان : ص = $\frac{\text{م}}{\text{س}}$ (أي أن : س ص = م : م ≠ صفر)

****

والعكس صحيح إذا كان : ص $\propto \frac{1}{\text{س}}$ فإن :

١) ص = $\frac{\text{م}}{\text{س}}$ (يستخدم في إيجاد العلاقة بين ص ، س)

٢) $\frac{\text{ص}_1}{\text{ص}_2} = \frac{\text{س}_2}{\text{س}_1}$ (يستخدم في ايجاد قيمة مجهولة)

مثـال : إذا كان ص $\propto \frac{1}{\text{س}}$ وكانت ص = ٦ عند س = ٢.٥ فاوجد العلاقة بين : س ، ص ثم أوجد قيمة ص عندما س = ١٤

الحـل :

∵ ص $\propto \frac{1}{\text{س}}$

∴ ص = $\frac{\text{م}}{\text{س}}$ ∵ ص = ٦ عند س = ٢,٥

∴ ٦= $\frac{\text{م}}{2.5}$ ، م = ٦ × ٢,٥ = ١٥

∴ العلاقة هي : ص = $\frac{15}{\text{س}}$ ، أو س ص = ١٥

عندما س = ٥ ⇐ ص = $\frac{15}{5}$ = ٣

مثـال : إذا كان طول مستطيل (ل) يتغير عكسياً بتغير عرضه (ع) بفرض ثبوت مساحة المستطيل ، وكانت ل = ١٢ سم عندما ع = ٨ سم فأوجد قيمة ل عندما ع = ٣ سم

الحـل :

∵ ل $\propto \frac{1}{\text{ع}}$ ∴ $\frac{\text{ل}_1}{\text{ل}_2} = \frac{\text{ع}_2}{\text{ع}_1}$

حيث : ل_1= ١٢ ، ع_1= ٨ ، ل_2 = ؟ ، ع_2=٣

$\frac{12}{\text{ل}_2} = \frac{3}{8}$ ∴ $\text{ل}_2 = \frac{12 \times 8}{3}$ = ٣٢ سم

مثـال : إذا كان $ٍ^٢ ب^٤ - ١٠ ٍ ب^٢ = -٢٥$

فأثبت أن : ٍ تتناسب عكسياً مع $ب^٢$

الحل : $\because ٍ^٢ ب^٤ + ٤ ٍ ب^٢ = -٢٥$

$\therefore ٍ^٢ ب^٤ + ٤ ٍ ب^٢ + ٢٥ = ٠$

$(ٍ ب^٢ - ٥)^٢ = ٠$

$ٍ ب^٢ - ٥ = ٠$

$ٍ ب^٢ = ٥$

$\therefore$ ٍ تتناسب عكسياً مع $ب^٢$

مثـال : إذا كانت : ص = ١ + ب حيث ب تتغير عكسياً مع $س^٢$ وكانت ص = ١٧ عندما س = $\frac{١}{٢}$

١) أوجد العلاقة بين س ، ص

٢) أوجد قيمة ص عندما س = ٢

الحل : $\because$ ب تتغير عكسياً مع $س^٢$

$\therefore ب = \frac{م}{س^٢}$

$\because ص = ١ + ب$

$\therefore ص = ١ + \frac{م}{س^٢}$ $\because$ ص = ١٧ عندما س = $\frac{١}{٢}$

$١٧ = ١ + \frac{م}{(\frac{١}{٢})^٢}$

$١٧ = ١ + \frac{م}{\frac{١}{٤}}$

$١٧ = ١ + ٤ م$ ، $١٧ - ١ = ٤ م$

$١٦ = ٤ م$ ، $م = \frac{١٦}{٤} = ٤$

$\therefore$ العلاقة هي : $ص = ١ + \frac{٤}{س^٢}$

عندما س = ٢

$ص = ١ + \frac{٤}{٢^٢} = ١ + \frac{٤}{٤} = ١ + ١ = ٢$

تمارين

س ١) إذا كانت ص تتغير عكسياً مع س وكانت ص = ٦ عندما س = ٥ أوجد العلاقة بين ص ، س
ثم أوجد قيمة س عندما ص = ٢

س٢) إذا كانت $س^٤ ص^٢ - ٨ س^٢ ص + ١٦ = ٠$

إثبت أن ص تتغير عكسياً مع $س^٢$

س٣) اذا كان $س^٢ ص^٢ - ٦$ س ص + ٩ = ٠
فاثبت أن ص تتغير عكسيا مع س

س٤) اذا كان ص = أ – ٩ وكانت ص ∝ $\frac{1}{س^2}$ وكانت أ = ١٨
عندما س = ٢ أوجد العلاقة بين س ، ص ثم اوجد قيمة ص
عندما س = ١

الواجب المنزلي

١) اذا كان ص٢ ∝ س٣ اوجد العلاقة بين س ، ص
حيث ص = ٣ ، س = ٢

٢) اذا كان ص٢ + ٤س٢ = ٤ س ص
فحدد نوع العلاقة بين س ، ص

٣) اذا كان ص تتغير عكسيا مع $\sqrt{س}$ ، ص = ٢
عندما س = ١٦ اوجد قيمة ص عندما س = ٣٢

لا تتوقف عند أول عقبة
اصعد كل قمة وتخطاها

مراجعة على الوحدة الثانية
التناسب و التغير الطردي والعكسي

أولا : الأسئلة الموضوعية

أكمل ما يلي :-

(١) إذا كان : ٣ أ = ٤ ب فإن : أ : ب = ... : ....

(٢) إذا كان : $\frac{س}{٣} = \frac{ص}{٥}$ فإن : $\frac{٣ س}{٥ ص}$ = ...

(٣) إذا كان : ٤ $س^٢$ − ١٢ س ص + ٩ $ص^٢$ = ٠ وكانت : س ∈ ح ، ص ∈ ح

فإن : $\frac{س}{ص} = \frac{.....}{.....}$

(٤) إذا كان : $\frac{أ}{ب} = \frac{٧}{٢}$ فإن : $\frac{أ - ب}{أ + ب} = \frac{.....}{.....}$

(٥) إذا كان : $\frac{أ}{ب} = \frac{٢}{٣}$ ، $\frac{أ}{جـ} = \frac{٣}{٥}$ فإن : أ : ب : جـ = ... : .... : ....

(٦) $\frac{س}{٦} = \frac{ص}{٥} = \frac{ع}{٤} = \frac{.....}{١١} = \frac{٢ ص + ع}{............}$

(٧) إذا كانت : ٣ ، ٤ ، جـ ، ٨ كميات متناسبة فإن : جـ = ...

(٨) الوسط المتناسب بين : ٣ أ $ب^٢$ ، ٢٧ $أ^٣$ $ب^٢$ هو ....

(٩) إذا كانت : ٩ ، ٢ س ، $\frac{١}{ص^٢}$ كميات متناسبة فإن : س ص = ...

(١٠) إذا كانت : ١ ، س ، ٩ ، ص في تناسب متسلسل

فإن : س = ... ، ص = ...

(١١) إذا كانت : ص = ٣ س فإن : ص ∝ ....

(١٢) إذا كانت : س ص − ٧ = ٠ فإن : ص ∝ ....

(١٣) إذا كانت : ص ∝ س وأخذ المتغير س القيمتين $س_١$ ، $س_٢$ وأخذ المتغير ص القيمتين $ص_١$ ، $ص_٢$ على الترتيب فإن : $\frac{س_١}{س_٢} = \frac{.....}{.....}$

(١٤) إذا كانت : ص ∝ $\frac{١}{س}$ وأخذ المتغير س القيمتين $س_١$ ، $س_٢$ وأخذ المتغير ص القيمتين $ص_١$ ، $ص_٢$ على الترتيب فإن : $\frac{س_١}{س_٢} = \frac{.....}{.....}$

(١٥) إذا كانت : ص ∝ س وكانت ص = ٢ عندما س = ٤ فإن : ص = ... س

(١٦) إذا كانت : ص تتناسب عكسيًا مع س وكانت ص = ٢ عندما س = $\frac{١}{٢}$

فإن : ص = $\frac{.....}{س}$

(١٧) إذا كانت : ص ∝ س وكانت ص = ١ عندما س = ٤

فإن : ص = ... عندما س = ٨

(١٨) إذا كانت : $س^٢$ $ص^٢$ − ٤ س ص + ٤ = ٠ فإن : ص ∝ ....

(١٩) إذا كانت : $ص^٢$ − ٦ س ص + ٩ $س^٢$ = ٠ فإن : ص ∝ ....

ثانيا: الأسئلة المقالية

س١ إذا كانت المجموعات الآتية متناسبة فأوجد قيمة س :

١) ٨ ، س ، ٤ ، ٥

٢) ١١ ، ٣ ، س ، ٦

٣) ٦ ، ٢٤ ، ١ ، س

س٢) أوجد س : ص : ع في كل مما يأتي :

١) $\frac{س}{ص} = \frac{٣}{٥}$ ، $\frac{ص}{ع} = \frac{٥}{٧}$

٢) $\frac{س}{ص} = \frac{٤}{٥}$ ، $\frac{س}{ع} = \frac{٣}{٧}$

س٣) إذا كان : $\frac{س}{ص} = \frac{٢}{٥}$ فأوجد قيمة :

١) $\frac{س + ص}{ص}$

٢) $\frac{٧ س - ٢ ص}{٣ س + ٢ ص}$

س ٤) إذا كانت $\frac{أ}{ب - أ} = \frac{ج}{د - ج}$

فأثبت أن أ ، ب ، ج ، د كميات متناسبة

س ٥) إذا كان : $\frac{س}{٣} = \frac{ص}{٤} = \frac{ع}{٥}$ فأثبت أن :

$\sqrt{٣س^{٢} + ٣ ص^{٢} + ع^{٢}} = ٢ س + ص$

س٦) إذا كانت ب وسطاً متناسباً بين م ، ج فأثبت أن :

$$\frac{\text{م}^{٢}}{\text{ب}^{٢}} + \frac{\text{ب}^{٢}}{\text{ج}^{٢}} = \frac{\text{٢ م}}{\text{ج}}$$

س ٧) إذا كانت ص = ٣ + ع وكانت ع ∝ س وكانت

ص = ١٣ عندما س = ٢ أوجد العلاقة بين ص ، س

ثم أوجد قيمة ص عندما س = ٤

س ٨) إذ كانت : $\frac{\text{٢١ س - ص}}{\text{٧ س - ع}} = \frac{\text{ص}}{\text{ع}}$

فإثبت أن : ص ∝ ع

اجعل من حلمك جناحين، وامنح لنفسك الفرصة للطيران في سماء النجاح

الوحدة الثالثة : الإحصـــــــــاء

جمع البيانات

جمع البيانات

تعتبر طريقة جمع البيانات من أهم المراحل التى يعتمد عليها البحث الأحصائى كما أن جمع البيانات بأسلوب علمى صحيح يترتب عليه الوصول إلى نتائج دقيقة حتى يتم أتخاذ القرارات السليمة

مصادر جمع البيانات

١) مصادر أولية (مصادر ميدانية) :-

وهى المصادر التى نحصل منها على البيانات بشكل مباشر عن طريق المقابلة الشخصية أو الاستبيان (استطلاع الرأى)

مميزاته :- الدقة

عيوبه :- تحتاج وقت ومجهود كبير ومكلفة جداً

****

٢) مصادر ثانوية (مصادر تاريخية) :-

وهى المصادر التى يتم الحصول عليها من أجهزة أو هيئات رسمية مثل نشرات الجهاز المركزى للتعبئة والأحصاء والأنترنت ووسائل الأعلام

مميزاته :- توفير الوقت والجهد والمال

عيوبه :- عدم الدقة أحياناً لبعض المصادر

أسلوب جمع البيانات

يتحدد أسلوب جمع البيانات تبعاً للهدف وحجم المجتمع الأحصائى محل البحث

ويعرف المجتمع الأحصائى بأنه جميع المفردات التى يجمعها خصائص عامة واحدة

مثل تلاميذ مدرسة ما تمثل مجتمعاً احصائياً مفرداته التلميذ أو عمال مصنع ما تمثل مجتمعاً احصائياً مفرداته العامل

أولا : أسلوب الحصر الشامل

ويعنى جمع البيانات المتعلقة بالظاهرة محل الدراسة من جميع مفردات المجتمع الاحصائى

مميزاته :- الشمول وعدم التحيز ودقة النتائج .

عيوبه :- الحاجة إلى وقت طويل ومجهود كبير وتكلفة باهظة

ثانيا : أسلوب العينات

ويقوم على فكرة أختيار عينة من المجتمع الأحصائى الذى تمثله ويجرى البحث على العينة وتعمم النتائج على المجتمع كله .

مزايا أسلوب العينات :-

١)توفير الوقت والجهد والمال

٢)الطريقة الوحيدة لجمع البيانات فى المجتمعات الكبيرة (مجتمع الاسماك مثلا)

٣)الأسلوب الوحيد لبعض المجتمعات المحدودة

عيوبه :-

عدم دقة النتائج إذا كانت العينة المختارة لا تمثل المجتمع تمثيلا جيدا (صادقاً) وتسمى بالعينة المتحيزة .

****

*** كيفية أختيار العينات والشروط الواجب توافرها فى العينة**

أولا: الاختيار المتحيز (العينات الغير عشوائية)

وهو أختيار العينة بطريقة تناسب أهداف البحث وتعرف بالعينة العمدية

ثانيا: الاختيار العشوائى (العينات العشوائية)

وهو أختيار العينة بحيث تكون فرص ظهور أى من مفردات المجتمع متساوية

ومن أهم أنواع العينات العشوائية

العينة العشوائية البسيطة :- وهى أبسط أنواع العينات ويتم سحبها من المجتمعات المتجانسة ويتوقف اختيارها على حجم وعدد وحدات المجتمع

العينة العشوائية الطبقية :- عندما يكون المجتمع محل الدراسة غير متجانس أى يتكون من مجموعات نوعية تختلف فى الصفات فيقسم المجتمع إلى مجموعات متجانسة تبعا للصفات المكونة له وتسمى كل مجموعة بطبقة .

التشتت

التشتت لاى مجموعة من القيم يقصد به التباعد أو الأختلاف بين مفرداتها وهو مقياس يعبر عن مدى تجانس المجموعات

من مقاييس التشتت المدى و الانحراف المعيارى

****

أولاً : المــدى

المدى هو أبسط مقاييس التشتت وهو الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة

أى أن : **المدى = أكبر قيمة – أصغر قيمة**

مثال : أوجد المدى للقيم ١ ، ١٠ ، ٢٠ ، ١٥ ، ٧

الحل : المدى = أكبر قيمة – أصغر قيمة = ٢٠ – ١ = ١٩

****

عيوب المدى

١- يتأثر المدى تأثيراً كبيراً بالقيم المتطرفة

٢- لا يعطى صورة صادقة لتشتت المجموعة نظراً لاعتماده على قيمتين فقط

ميزاته : أسهل وأبسط طرق قياس التشتت

ثانياً : الانحراف المعياري

الانحراف المعياري هو الجذر التربيعى الموجب لمتوسط مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابى

ويرمز له بالرمز " σ " ويقرأ " سيجما "

وهو أكثر مقاييس التشتت أنتشاراً وأدقها .

١) حساب الإنحراف المعياري لمجموعة من المفردات

الانحراف المعيارى $\sigma = \sqrt{\frac{\text{مجـ}(\text{س} - \bar{\text{س}})^2}{\text{ن}}}$

حيث : س مفردة من المفردات

$\bar{\text{س}}$ وتقرأ (س بار) تشير إلى الوسط الحسابي للمفردات

ن عدد المفردات

مجـ تشير إلى عملية الجمع

مثال : أوجد الإنحراف المعياري للقيم ٨ ، ٩ ، ٧ ، ٦ ، ٥

الحل : ١) نحسب الوسط الحسابى $\bar{\text{س}} = \frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}}$

$= \frac{٨ + ٩ + ٧ + ٦ + ٥}{٥} = \frac{٣٥}{٥} = ٧$

٢) نكون الجدول التالي :

س	س - $\bar{\text{س}}$	(س – $\bar{\text{س}}$)^2
٨	٨ – ٧ = ١	١
٩	٩ – ٧ = ٢	٤
٧	٧ – ٧ = ٠	٠
٦	٦ – ٧ = ٠	١
٥	٥ – ٧ = -٢	٤
المجموع		١٠

٣) نحسب الانحراف المعيارى

$\sigma = \sqrt{\frac{\text{مجـ}(\text{س} - \bar{\text{س}})^2}{\text{ن}}}$

$= \sqrt{\frac{١٠}{٥}} = \sqrt{٢} \approx ١,٤$

٢) حساب الإنحراف المعياري لتوزيع تكراري

الانحراف المعياري $\sigma = \sqrt{\frac{\text{مجـ}(\text{س} - \bar{\text{س}})^2 \times \text{ك}}{\text{مجـ ك}}}$

حيث : س القيمة أو مركز المجموعة

$\bar{\text{س}}$ الوسط الحسابي = $\frac{\text{مجـ}(\text{س} \times \text{ك})}{\text{مجـ ك}}$

ك تكرار القيمة أو المجموعة

مجـ ك مجموع التكرارات

مثال : الجدول التالى يبين توزيع أعمار ٢٠ شخصاً بالسنين

العمر	١٥	٢٠	٢٢	٢٣	٢٥	٣٠	المجموع
عددالأشخاص	٢	٣	٥	٥	١	٤	٢٠

أوجد الانحراف المعيارى للأعمار

الحل :

١)نحسب الوسط الحسابي

$\bar{\text{س}} = \frac{\text{مجـ}(\text{س} \times \text{ك})}{\text{مجـ ك}} = \frac{٤٦٠}{٢٠} = ٢٣$

العمر س	عدد الاشخاص ك	س×ك
١٥	٢	٣٠
٢٠	٣	٦٠
٢٢	٥	١١٠
٢٣	٥	١١٥
٢٥	١	٢٥
٣٠	٤	١٢٠
المجموع	٢٠	٤٦٠

٢) نكون الجدول الآتي :

س	ك	س - $\bar{\text{س}}$	(س – $\bar{\text{س}}$)^2	(س – $\bar{\text{س}}$)^2 ك
١٥	٢	١٥-٢٣=-٨	٦٤	١٢٨
٢٠	٣	٢٠-٢٣=-٣	٩	٢٧
٢٢	٥	٢٢-٢٣=-١	١	٥
٢٣	٥	٢٣-٢٣=٠	٠	٠
٢٥	١	٢٥-٢٣=٢	٤	٤
٣٠	٤	٣٠-٢٣=٧	٤٩	١٩٦
المجموع	٢٠			٣٦٠

٣) نحسب الانحراف المعياري

الانحراف المعياري $\sigma = \sqrt{\frac{\text{مجـ}(\text{س} - \bar{\text{س}})^2 \times \text{ك}}{\text{مجـ ك}}}$

$= \sqrt{\frac{٣٦٠}{٢٠}} = \sqrt{١٨} \approx ٤,٢٤$ سنة

مثال : الجدول التالى يبين توزيع الحافز الأسبوعي لعدد ١٠٠ عامل في أحد المصانع :

الحوافز بالجنيه	٣٥-	٤٥-	٥٥-	٦٥-	٧٥-	٨٥-
عدد العمال	١٠	١٤	٢٠	٢٨	٢٠	٨

أوجد الانحراف المعيارى لهذا التوزيع

الحل : مركز المجموعة (س) = $\frac{\text{الحد الأدنى + الحد الأعلى}}{٢}$

١) نحسب الوسط الحسابي

$$\bar{س} = \frac{\text{مجـ}(س \times ك)}{\text{مجـ } ك} = \frac{٦٥٨٠}{١٠٠} = ٦٥,٨$$ جنيه

المجموعة	س	ك	س×ك
٣٥ -	٤٠	١٠	٤٠٠
٤٥ -	٥٠	١٤	٧٠٠
٥٥ -	٦٠	٢٠	١٢٠٠
٦٥ -	٧٠	٢٨	١٩٦٠
٧٥ -	٨٠	٢٠	١٦٠٠
٨٥ -	٩٠	٨	٧٢٠
المجموع		١٠٠	٦٥٨٠

٢) نكون الجدول الآتي :

س	ك	$س - \bar{س}$	$(س - \bar{س})^٢$	$(س - \bar{س})^٢$ ك
٤٠	١٠	٢٥,٨-	٦٦٥,٦٤	٦٦٥٦,٤
٥٠	١٤	١٥,٨-	٢٤٩,٤٦	٣٤٩٤,٩٦
٦٠	٢٠	٥,٨-	٣٣,٦٤	٦٧٢,٨
٧٠	٢٨	٤,٢	١٧,٦٤	٤٩٣,٩٢
٨٠	٢٠	١٤,٢	٢٠١,٦٤	٤٠٣٢,٨
٩٠	٨	٢٤,٢	٥٨٥,٦٤	٤٦٨٥,١٢
المجموع	٢٠			٢٠٠٣٦

٣) نحسب الانحراف المعياري

$$\text{الانحراف المعياري } \sigma = \sqrt{\frac{\text{مجـ}(س - \bar{س})^٢ \times ك}{\text{مجـ } ك}}$$

$$= \sqrt{\frac{٢٠٠٣٦}{٢٠}} \approx ١٤,١٥$$ جنيه

ملاحظات هامة:

١) الإنحراف المعياري له نفس وحدة القياس المستخدمة في البيانات المعطاة

٢)القيم الأكثر تجانساً تكون أقل تشتتاً ويكون الإنحراف المعياري لها صغير

٣) إذا كان الإنحراف المعياري = صفر فمعنى ذلك أن كل قيم المفردات متساوية وهي حالة التجانس التام (التشتت المنعدم)

تمارين

س١) أكمل ما يأتي :

(١) مصادر جمع البيانات هي .... ، ....

(٢) تعتبر المقابلة الشخصية من المصادر .... للبيانات.

(٣) بيانات الطلاب المسجلة فى شئون الطلاب من المصادر .... للبيانات.

(٤) نشرات الجهاز المركزى للتعبئة والإحصاء من المصادر .... للبيانات.

(٥) الملاحظة المباشرة من المصادر .... للبيانات.

(٦) الأسلوب الناسب لفحص دم مريض هو أسلوب ....

(٧) الأسلوب المناسب لفحص إنتاج مصنع هو أسلوب ....

(٨) الأسلوب المناسب لمعرفة تعداد السكان هو أسلوب ....

(٩) الأسلوب المناسب لمعرفة نسبة الغياب فى إحدى المدارس هو أسلوب ....

(١٠) إذا كان المجتمع محل البحث مقسمًا إلى أميين ويقرأون ويكتبون وحاملي المؤهلات المتوسطة وحاملي المؤهلات فوق المتوسطة وحاملي المؤهلات العليا فإن العينة المختارة لإجراء بحث ما تسمى بالعينة ....

س٢) أوجد الإنحراف المعياري للقيم
٢٥ ، ٢٤ ، ٢٥ ، ٣٠ ، ٢٨ ، ٣٠

الحل : ١) نحسب الوسط الحسابى $\bar{س} = \frac{\text{مجـ } س}{ن}$

٢) نكون الجدول التالي :

س	$س - \bar{س}$	$(س - \bar{س})^٢$
المجمــــــــوع		

٣) نحسب الانحراف المعيارى

$\sigma = \sqrt{\dfrac{\text{مجـ}(س - \overline{س})^{٢}}{ن}}$

س٣) أوجد الانحراف المعيارى لهذا التوزيع

المجموعة	٠-	٤-	٨-	١٢-	١٦-	مجموع
التكرار	٣	٤	٧	٢	٩	٢٥

الحل :

١)نحسب الوسط الحسابي

$\overline{س} = \dfrac{\text{مجـ}(س \times ك)}{\text{مجـ}ك} =$

المجموعة	مركز المجموعة (س)	ك	س×ك
المجموع		٢٥	

٢) نكون الجدول الآتي :

س	ك	س - $\overline{س}$	$(س - \overline{س})^{٢}$	$(س - \overline{س})^{٢}$ ك
المجموع	...			

٣) نحسب الانحراف المعيارى

الانحراف المعيارى $\sigma = \sqrt{\dfrac{\text{مجـ}(س - \overline{س})^{٢} \times ك}{\text{مجـ}ك}}$

اعمل بذكاء، وليس فقط بجد



حساب المثلثات
و الهندسة

الحصة الأولى

الوحدة الرابعة : حساب المثلثات

النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة

تذكر أن :

وحدات القياس الستيني للزاوية هي :

الدرجة ويرمز لها بالرمز ١°

الدقيقة ويرمز لها بالرمز ١َ

الثانية ويرمز لها بالرمز ١ً

العلاقة بين الدرجلت والدقائق والثواني

الدرجة = ٦٠ دقيقة ، الدقيقة = ٦٠ ثانية

أي أن : الدرجة = ٦٠ × ٦٠ = ٣٦٠٠ ثانية

مثـال : ١) اكتب بالدرجات : ٤٨ً ٣٦َ ٢٢°

٢) اكتب بالدرجات والدقائق والثواني : ٤٥.١٨°

الحل :

١) نحول الدقائق إلى درجات بإستخدام الآلة الحاسبة كالتالي :

نضغط على المفاتيح من اليسار إلى اليمين كالتالي :

2 2 ''' 3 6 ''' 4 8 ''' = '''

فنجد الناتج : ٢٢.٦١٣٣٣٣٣

١) نحول ٤٥.١٨° بإستخدام الآلة الحاسبة كالتالي :

نضغط على المفاتيح من اليسار إلى اليمين كالتالي :

4 5 . 1 8 = '''

فنجد الناتج : ٤٨ً ١٠َ ٤٥°

مثـال : إذا كانت النسبة بين قياسي زاويتين متتامتين ٧ : ٩ فأوجد القياس الستيني لكل منهما

الحل :

نفرض أن قياس الزاويتين : ٧ س ، ٩ س

٧ س + ٩ س = ٩٠°

١٦ س = ٩٠°

س = $\frac{٩٠}{١٦}$ = ٥.٦٢٥°

قياس الزاوية الأولى = ٧ × ٥,٦٢٥° = ٣٩,٣٧٥°

= ٣٠ً ٢٢َ ٣٩°

قياس الزاوية الثانية = ٩ × ٥,٦٢٥° = ٥٠,٦٢٥°

= ٣٠ً ٣٧َ ٥٠°

تذكر أن :

* مجموع قياسي الزاويتين المتتامتين = ٩٠°
* مجموع قياسي الزاويتين المتكاملتين = ١٨٠°
* مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة :

هي نسبة بين طولي ضلعين من أضلاع المثلث القائم الزاوية التي تقع فيه هذه الزاوية

ويوجد ثلاث نسب مثلثية أساسية للزاوية الحادة وهي :

١) جيب الزاوية : يرمز لها بالرمز (حا)

وتساوي $\frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية}}{\text{طول الوتر}}$

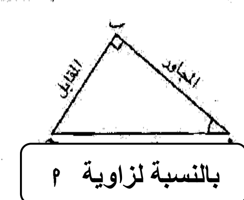
٢) جيب تمام الزاوية : يرمز لها بالرمز (حتا)

وتساوي $\frac{\text{طول الضلع المجاور للزاوية}}{\text{طول الوتر}}$

١) ظل الزاوية : يرمز لها بالرمز (ظا)

وتساوي $\frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية}}{\text{طول الضلع المجاور للزاوية}}$

أي أنه : إذا كان Δ أ ب ج قائم الزاوية في ب فإن :

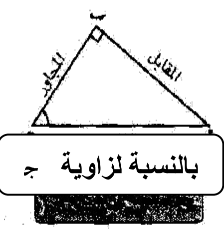


بالنسبة لزاوية أ

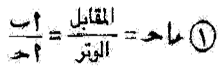
① حا أ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{\text{ب ج}}{\text{أ ج}}$

② حتا أ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ ج}}$

③ ظا أ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ = $\frac{\text{ب ج}}{\text{أ ب}}$



بالنسبة لزاوية ج



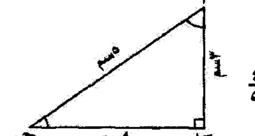
① حا ج = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ ج}}$

② حتا ج = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{\text{ب ج}}{\text{أ ج}}$

③ ظا ج = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب ج}}$

مثـال : إذا كان : Δ أ ب ج قائم الزاوية في ب

وكان : أ ب = ٣ سم ، ب ج = ٤ سم ، أ ج = ٥ سم فإن :



١) حا أ = $\frac{٤}{٥}$	١) حا ج = $\frac{٣}{٥}$
٢) حتا أ = $\frac{٣}{٥}$	٢) حتا ج = $\frac{٤}{٥}$
٣) ظا أ = $\frac{٤}{٣}$	٣) ظا ج = $\frac{٣}{٤}$

مثال : ٵ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ٵ حيث :
ٵ ب = ٩ سم ، ٵ جـ = ١٢ سم **أوجد :**

١) حا ب ، حتا ب ، طا ب
٢) حا جـ ، حتا جـ ، طا جـ
٣) أثبت أن : حا ب × حتا جـ + حتا ب × حا جـ = ١

الحل :

من نظرية فيثاغورث

$(ب جـ)^٢ = ٨١ + ١٤٤ = ٢٢٥$

ب جـ = $\sqrt{٢٢٥}$ = ١٥ سم

١) حا ب = $\frac{ٵ جـ}{ب جـ} = \frac{١٢}{١٥} = \frac{٤}{٥}$

حتا ب = $\frac{ٵ ب}{ب جـ} = \frac{٩}{١٥} = \frac{٣}{٥}$

طا ب = $\frac{ٵ جـ}{ٵ ب} = \frac{١٢}{٩} = \frac{٤}{٣}$

٢) حا جـ = $\frac{ٵ ب}{ب جـ} = \frac{٩}{١٥} = \frac{٣}{٥}$

حتا جـ = $\frac{ٵ جـ}{ب جـ} = \frac{١٢}{١٥} = \frac{٤}{٥}$

طا جـ = $\frac{ٵ ب}{ٵ جـ} = \frac{٩}{١٢} = \frac{٣}{٤}$

٣) حا ب × حتا جـ + حتا ب × حا جـ = $\frac{٤}{٥} \times \frac{٤}{٥} + \frac{٣}{٥} \times \frac{٣}{٥}$

$= \frac{١٦}{٢٥} + \frac{٩}{٢٥} = \frac{٢٥}{٢٥} = ١$

ملاحظات :

إذا كان : ق(∠ ب) + ق(∠ جـ) = ٩٠ْ
(زاويتان متتامتان)
فـــإن : حا ب = حتا جـ
والعكس صحيح : إذا كان : حا ب = حتا جـ
فـــإن : ق(∠ ب) + ق(∠ جـ) = ٩٠ْ

طا ب = $\frac{حا ب}{حتا ب}$

النسب المثلثية للزوايا المتساوية في القياس تكون متساوية

مثال : ٵ ب جـ مثلث فيه : ٵ ب = ٵ جـ = ١٠ سم ،
ب جـ = ١٢ سم ، رسم ٵ د ⊥ $\overleftrightarrow{ب جـ}$ يقطعها في د

١) أوجد قيمة : حا ب + حتا جـ
٢) أوجد قيمة : طا (∠ جـ ٵ د)
٣) بين أن : حا جـ + حتا جـ > ١
ثم أوجد قيمة : حا^٢ جـ + حتا^٢ جـ

الحل :

من نظرية فيثاغورث

$(ٵ د)^٢ = ١٠٠ - ٣٦ = ٦٤$

ٵ د = $\sqrt{٦٤}$ = ٨ سم

١) حا ب = $\frac{ٵ د}{ٵ ب} = \frac{٨}{١٠} = \frac{٤}{٥}$

حتا جـ = $\frac{جـ د}{ٵ جـ} = \frac{٦}{١٠} = \frac{٣}{٥}$

∴ حا ب + حتا جـ = $\frac{٤}{٥} + \frac{٣}{٥} = \frac{٧}{٥}$

٢) طا (∠ جـ ٵ د) = $\frac{جـ د}{ٵ د} = \frac{٦}{٨} = \frac{٣}{٤}$

٣) حا جـ = $\frac{ٵ د}{ٵ جـ} = \frac{٨}{١٠} = \frac{٤}{٥}$ ، حتا جـ = $\frac{٣}{٥}$

حا جـ + حتا جـ = $\frac{٤}{٥} + \frac{٣}{٥} = \frac{٧}{٥}$

∴ حا جـ + حتا جـ > ١

حا^٢ جـ + حتا^٢ جـ = $(\frac{٤}{٥})^٢ + (\frac{٣}{٥})^٢ = \frac{١٦}{٢٥} + \frac{٩}{٢٥} = ١$

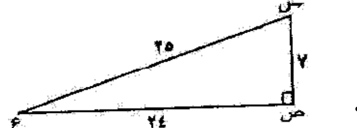
تمارين (١)

س١) أكمل ما يأتي :

١) ٨ً ٣٨َ ٨٥ْ = ... (بالدرجات)

٢) ١٨.٥٦ْ = ...(بالدرجات والدقائق والثواني)

٣) بإستخدام الشكل المقابل:



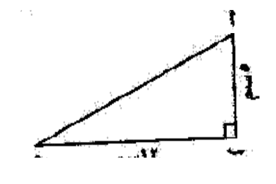
أ) حا س = ...

ب) حتا ع = ...

جـ) طا س = ...

٤) في الشكل المقابل:

حا أ = ...



٥) في الشكل المقابل:

حا ج × حتا ج = ...

(أسوان ٢٠١١)

٦) في الشكل المقابل:

$\frac{\text{ب ج}}{\text{أ ج}}$ = حتا ....



٧) في الشكل المقابل:

حتا ب = ...



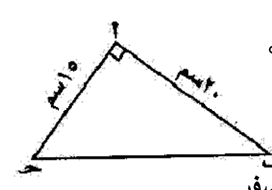
س٢) في الشكل المقابل :

أ ب ج مثلث فيه :ق(< أ) = ٩٠ °

، أ ج = ١٥ سم ، أ ب = ٢٠ سم

أثبت أن :

حتا ج حتا ب − حا ج حا ب = صفر



الواجب المنزلي

س١) في الشكل المقابل :

أ ب ج مثلث فيه :ق(< أ ب) = ٩٠ °

، أ ج = ١٧ سم ، أ ب = ٨ سم

أوجد كلاً من :

حا أ ، حتا أ ، طا أ ، حا ج ، حتا ج ، طا ج ،

س٢) س ص ع مثلث قائم الزاوية في ع ، س ع = ٧ سم ، س ص = ٢٥ سم أوجد قيمة كل من :

١) طا س × طا ص ٢) حا^2 س + حا^2 ص

الثقة تأتي من التحضير الجيد، كن واثقًا بقدراتك

الحصة الثانية

النسب المثلثية الأساسية لبعض الزوايا

ق(∠ هـ)	قيم الدوال المثلثية		
	جا هـ	جتا هـ	ظا هـ
٣٠°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
٦٠°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
٤٥°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	١

مثال : أوجد قيمة :

جا ٣٠° جتا ٦٠° + جتا² ٣٠° + ٥ ظا ٤٥° − ١٠ جتا² ٤٥°

الحل :

المقدار

$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 5 \times 1 - 10 \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$

$= \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + 5 - \frac{10}{2} = 1 + 5 - 5 = 1$

مثال : أثبت أن : جا² ٦٠° + جا² ٤٥° + جا² ٣٠°

= جتا² ٣٠° + $\frac{1}{3}$ ظا² ٦٠ − جتا² ٦٠°

الحل :

الطرف الأيمن $= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$= \frac{3}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$

الطرف الأيسر $= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\sqrt{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$= \frac{3}{4} + 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$

∴ الطرفان متساويان

مثال : أوجد قيمة س التي تحقق أن :

١) س جتا ٣٠° = ظا ٦٠°

٢) س جا ٣٠° جتا² ٤٥° = جتا² ٣٠°

الحل :

١) س جتا ٣٠° = ظا ٦٠°

س $\times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

س $\times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \times \frac{2}{\sqrt{3}}$

س = ٢

٢) س جا ٣٠° جتا² ٤٥° = جتا² ٣٠°

س $\times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

س $\times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

$\frac{1}{4}$ س $= \frac{3}{4}$

س = ٣

استخدام حاسبة الجيب

أولاً : إيجاد النسب المثلثية لزاوية معلومة

• فى حاسبة الجيب توجد ثلاثة مفاتيح : tan ، cos ، sin

(١) المفتاح sin ويعنى الجيب (جا)

(٢) المفتاح cos ويعنى جيب التمام (جتا)

(٣) المفتاح tan ويعنى الظل (ظا)

واستخدام هذه المفاتيح يعطينا النسب المثلثية الأساسية لأى زاوية معلوم قياسها.

مثال : بإستخدام حاسبة الجيب أوجد قيمة كل مما يأتي مقرباً الناتج لأربعة أرقام عشرية :

١) جا ٣٦°   ٢) جتا ٣٥َ ٧٢°   ٣) ظا ٢٥ً ٤٦َ ٥٠°

الحل :

١) استخدم مفاتيح الآلة بالتتابع من اليسار

sin 3 6 =

جا ٣٦° ≈ ٠,٥٨٧٨

٢) استخدم مفاتيح الآلة بالتتابع من اليسار

cos 7 2 °''' 3 5 °''' =

جتا ٣٥َ ٧٢° ≈ ٠,٢٩٩٣

٣) استخدم مفاتيح الآلة بالتتابع من اليسار

tan 5 0 °,,, 4 6 °,,, 2 5 °,,, =

ط ٥٠° ٤٦َ ٢٥ً ≃ ٠,٢٩٩٣

ثانياً : إيجاد قياس زاوية إذا علمت إحدى نسبها المثلثية

مثـال : أوجد هـ في كل مما يأتي حيث هـ قياس زاوية حادة

١) حا هـ = ٠.٨ ٢) حتا هـ = ٠.٧١٥٢

٣) ظا هـ = ١.٥١٥٦

الحل :

١) استخدم مفاتيح الآلة بالتتابع من اليسار

shift sin · 8 = °,,,

هـ ≃ ٤٨ً ٧َ ٥٣°

٢) استخدم مفاتيح الآلة بالتتابع من اليسار

shift cos · 7 1 5 2 = °,,,

هـ ≃ ٢٥ً ٢َ ٤٤°

٣) استخدم مفاتيح الآلة بالتتابع من اليسار

shift tan 1 · 5 1 5 6 = °,,,

هـ ≃ ٥٩ً ٣٤َ ٥٦°

مثـال : في الشكل المقابل

ا ب جـ د مستطيل فيه :

ا ب = ٦ سم ، ا جـ = ١٣سم

١) أوجد : ق(∠ ا جـ ب)

٢) أوجد مساحة المستطيل ا ب جـ د لأقرب رقم عشري واحد

الحل :

∵ ا ب جـ د مستطيل ∴ ق(∠ ب) = ٩٠°

في △ ا ب جـ : حا(∠ ا جـ ب) = $\frac{\text{ا ب}}{\text{ا جـ}}$ = $\frac{٦}{١٣}$

وبإستخدام حاسبة الجيب

∴ ق(∠ ا جـ ب) = ١١ً ٢٩َ ٢٧°

لحساب مساحة المستطيل نوجد طول ب جـ من نظرية فيثاغورث

(ب جـ)^{٢} = ١٦٩ – ٣٦

(ب جـ)^{٢} = ١٣٣

∴ ب جـ = $\sqrt{١٣٣}$

مساحة المستطيل ا ب جـ د = ٦ × $\sqrt{١٣٣}$ = ٦٩,٢ سم^{٢}

تمارين (٢)

س١) أكمل ما يأتى :

(١) حا ٤٥° – حتا ٤٥° = ...

(٢) حتا ٦٠° + حا ٣٠° = ...

(٣) حا ٣٠° + حتا ٦٠° – ظا ٤٥° = ...

(٤) حا ٦٠° + حتا ٣٠° + ظا ٦٠° = ...

(٥) حا^{٢} ٤٥° + حتا^{٢} ٤٥° = ...

(٦) ظا^{٢} ٦٠° + حتا ٦٠° – ظا ٤٥° = ...

(٧) ظا ٤٥° × حا ٣٠° = ...

(٨) ٤ حتا ٣٠° ظا ٦٠° = ...

(٩) حا ٣٠° حتا ٦٠° + حا^{٢} ٦٠° = ...

(١٠) حا ٤٥° حتا ٤٥° + حا ٣٠° حتا ٦٠° – حتا^{٢} ٣٠° = ...

(١١) ٢ حا ٣٠° حتا ٦٠° + $\sqrt{٢}$ حا ٤٥° = ...

(١٢) (حتا ٣٠° – حتا ٦٠°) (حا ٣٠° + حا ٦٠°) = ...

(١٣) حا ٣٠° = حتا ....°

(١٤) المثلث ا ب جـ قائم الزاوية فى ب ومتساوى الساقين

فإن : ظا ا = ...

س٢) بدون استخدام الآلة الحاسبة أثبت أن :

١) حا ٦٠° = ٢ حا ٣٠° حتا ٣٠°

٢) حتا ٦٠° = ٢ حتا² ٣٠° − ١

س ٣) أوجد قيمة س في كل مما يأتي :

١) ٤ س = حتا² ٣٠° طا² ٣٠° طا² ٤٥°

٢) حا س = حا ٦٠° حتا ٣٠° − حتا ٦٠° حا ٣٠°
حيث س زاوية حادة

الحصة الثالثة

مراجعة على الوحدة الرابعة
حساب المثلثات

أولا : الأسئلة الموضوعية

س ١) أكمل الجدول الآتي :

النسبة \ الزاوية	١٢َ ٤٢°			
حا	......	٠,٣٢١٤	......	......
حتا	......	......	٠,٥٣٢١	......
طا	......	......	......	٢,٠٦٢٥

(خلايا الصف الأول بعد ١٢َ ٤٢°: ...... | ...... | ......)

س ١) أكمل ما يأتي :

(١) ٢٤ً ٣٦َ ٤٦° = ... (بالدرجات)

(٢) ٤٤,١٢٥° = ... (بالدرجات والدقائق والثوانى)

(٣) إذا كان : طا هـ = ١,٤٢ حيث هـ قياس زاوية حادة فإن : ق (∠ هـ) = ...

(٤) إذا كان : حا هـ = ٠,٦٣ حيث هـ قياس زاوية حادة فإن : ق (∠ هـ) = ...

(٥) إذا كانت : حا س = $\frac{١}{٢}$ حيث س زاوية حادة فإن : ق (∠ س) = ...

(٦) إذا كانت : حتا $\frac{س}{٢}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ حيث س زاوية حادة فإن : ق (∠ س) = ...

(٧) حا ٦٠° + حتا ٣٠° − طا ٦٠° = ...

(٨) حتا ٦٠° + حا ٣٠° − طا ٤٥° = ...

(٩) ٢ حا ٣٠° حتا ٦٠° − طا ٤٥° = ...

(١٠) حا² ٣٠° + حتا² ٣٠° = ...

(١١) إذا كانت : طا (س + ١٠°) = $\sqrt{٣}$ حيث س زاوية حادة فإن : ق (∠ س) = ...

(١٢) إذا كانت : طا ٣ س = $\sqrt{٣}$ حيث س زاوية حادة فإن : ق (∠ س) = ...

ثانيا: الأسئلة المقالية

س ١) أوجد قيمة ما يأتي :

١) (حتا ٣٠° – حتا ٦٠°) (حا ٣٠° + حا ٦٠°)

س ٢) أثبت أن :

١) طا ٦٠° (١ – طا^{2} ٣٠°) = ٢ طا ٣٠°

٢) طا^{2} ٦٠° – طا^{2} ٤٥° = ٤ حا ٣٠°

س ٣) أوجد قيمة س في كل مما يأتى :

١) س حتا ٣٠° = طا ٦٠°

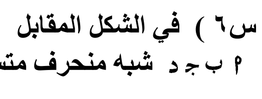
٢) ٤ س = حتا^{2} ٣٠° طا^{2} ٣٠° طا^{2} ٤٥°

س ٤) أوجد ق (∠ هـ) حيث هـ زاوية حادة :

١) حا هـ = ٠,٥

٢) حا^{2} ٤٥° = حتا هـ طا ٣٠°

٣) حا هـ = حا ٤٥° حتا ٣٠° + حتا ٤٥° حا ٣٠°



س٥) في الشكل المقابل
م ب جـ د مستطيل فيه :
م ب = ١٥ سم ، م جـ = ٢٥سم
١) أوجد : ق(< م جـ ب)
٢) أوجد مساحة المستطيل م ب جـ د

س٦) في الشكل المقابل
م ب جـ د شبه منحرف متساوي الساقين فيه :
م ب = م د = د جـ = ٥ سم
ب جـ = ١١ سم ، أوجد :
١) ق(< ب) ، ق(< م)
٢) مساحة شبه المنحرف م ب جـ د

تذكر أن كل جهد تبذله سيؤتي ثماره في النهاية

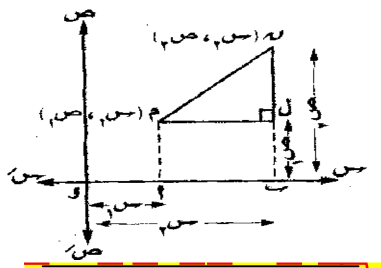
الحصة الرابعة

الوحدة الخامسة : الهندسة التحليلية

البعد بين نقطتين

بفرض أن م (س١، ص١) ، ن (س٢ ، ص٢)

فإن $م ن = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$



أي أن :

البعد بين نقطتين = $\sqrt{\text{مربع فرق السينات + مربع فرق الصادات}}$

مثال : إذا كان : م (٣ ، ٦) ، ن (-١ ، ٤) اوجد م ن

الحل :

$م ن = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

$م ن = \sqrt{(-١ - ٣)^٢ + (٤ - ٦)^٢}$

$= \sqrt{(-٤)^٢ + (-٢)^٢}$

$= \sqrt{١٦ + ٤} = \sqrt{٢٠} = ٢\sqrt{٥}$ وحدة طول

مثال : إذا كان ا ب ج مثلثاً حيث ا (٠ ، ٠)، ب (٣ ، ٤)، ج (-٤ ، ٣) أوجد محيط △ ا ب ج

الحل :

$ا ب = \sqrt{(٣ - ٠)^٢ + (٤ - ٠)^٢} = \sqrt{(٣)^٢ + (٤)^٢}$

$= \sqrt{٩ + ١٦} = \sqrt{٢٥} = ٥$ وحدة طول

$ب ج = \sqrt{(-٤ - ٣)^٢ + (٣ - ٤)^٢} = \sqrt{(-٧)^٢ + (-١)^٢}$

$= \sqrt{٤٩ + ١} = \sqrt{٥٠} = ٥\sqrt{٢}$ وحدة طول

$ا ج = \sqrt{(-٤ - ٠)^٢ + (٣ - ٠)^٢} = \sqrt{(-٤)^٢ + (٣)^٢}$

$= \sqrt{١٦ + ٩} = \sqrt{٢٥} = ٥$ وحدة طول

∴ محيط △ ا ب ج = $٥ + ٥ + ٥\sqrt{٢}$

$= (١٠ + ٥\sqrt{٢})$ وحدة طول

ملحوظة : لإثبات أن أي ثلاث نقاط تقع على استقامة واحدة نوجد البعد بين كل نقطتين ثم نثبت أن أكبر بعد يساوي مجموع البعدين الآخرين

مثال : أثبت أن النقط : ا(١ ، ١) ، ب (٢ ، ٢) ، ج (٣ ، ٣) تقع على استقامة واحدة

الحل :

$ا ب = \sqrt{(٢ - ١)^٢ + (٢ - ١)^٢} = \sqrt{(١)^٢ + (١)^٢}$

$= \sqrt{١ + ١} = \sqrt{٢}$ وحدة طول

$ب ج = \sqrt{(٣ - ٢)^٢ + (٣ - ٢)^٢} = \sqrt{(١)^٢ + (١)^٢}$

$= \sqrt{١ + ١} = \sqrt{٢}$ وحدة طول

$ا ج = \sqrt{(٣ - ١)^٢ + (٣ - ١)^٢} = \sqrt{(٢)^٢ + (٢)^٢}$

$= \sqrt{٤ + ٤} = \sqrt{٨} = ٢\sqrt{٢}$ وحدة طول

∵ ا ج = ا ب + ب ج

∴ ا ، ب ، ج تقع على استقامة واحدة

ملحوظة :

* لإثبات أن النقط ا ، ب ، ح هي رءوس مثلث نوجد ا ب ، ب ح ، ا ح ثم نثبت أن مجموع طولى أصغر ضلعين أكبر من طول الضلع الثالث.
* تعيين نوع المثلث حسب زواياه (حيث ا ح يمثل طول أكبر أضلاع المثلث ا ب ح) :

① إذا كان : $(ا ح)^٢ > (ا ب)^٢ + (ب ح)^٢$ فإن المثلث منفرج الزاوية فى ب

② إذا كان : $(ا ح)^٢ = (ا ب)^٢ + (ب ح)^٢$ فإن المثلث قائم الزاوية فى ب

③ إذا كان : $(ا ج)^٢ < (ا ب)^٢ + (ب ح)^٢$ فإن المثلث حاد الزوايا.

مثال : أثبت أن المثلث الذي رؤوسه : ا (٣ ، ٢) ، ب (-٤ ، ١) ، ج (٢ ، -١) قائم الزاوية وأوجد مساحته

الحل :

$ا ب = \sqrt{(٣ + ٤)^٢ + (٢ - ١)^٢} = \sqrt{(٧)^٢ + (١)^٢}$

$= \sqrt{٤٩ + ١} = \sqrt{٥٠}$ وحدة طول

$ب ج = \sqrt{(-٤ - ٢)^٢ + (١ + ١)^٢} = \sqrt{(-٦)^٢ + (٢)^٢}$

$= \sqrt{٣٦ + ٤} = \sqrt{٤٠}$ وحدة طول

$ا ج = \sqrt{(٣ - ٢)^٢ + (٢ + ١)^٢} = \sqrt{(١)^٢ + (٣)^٢}$

$= \sqrt{١ + ٩} = \sqrt{١٠}$ وحدة طول

∵ $(ا ج)^٢ + (ب ج)^٢ = ١٠ + ٤٠ = ٥٠$ ، $(ا ب)^٢ = ٥٠$

∴ $(أ جـ)^2 + (ب جـ)^2 = (أ ب)^2$

∴ Δ أ ب جـ قائم الزاوية في جـ

∴ مساحة Δ أ ب جـ = $\frac{1}{2}$ × أ جـ × ب جـ

= $\frac{1}{2} \times \sqrt{10} \times \sqrt{40}$

= ١٠ وحدة مربعة

أ(٢،٣) ب(-٤،١) جـ(٢،-١)

رسم توضيحي

ملحوظة :

إذا كانت النقط أ ، ب ، جـ ، د هي رؤوس شكل رباعي في ترتيب دوري واحد فلإثبات أن الشكل أ ب جـ د هو :

(١) متوازي أضلاع نثبت أن أ ب = جـ د ، ب جـ = د أ

(٢) معين نثبت أن أ ب = ب جـ = جـ د = د أ

(٣) مستطيل نثبت أن أ ب = جـ د ، ب جـ = د أ ، أ جـ = ب د

(٤) مربع نثبت أن أ ب = ب جـ = جـ د = د أ ، أ جـ = ب د

مثال : أثبت أن النقط : أ (٣ ، -٢) ، ب (-٥ ، ٠) ، جـ (٠ ، -٧) ، د (٨ ، -٩) هي رؤوس متوازي أضلاع

الحل :

أ ب = $\sqrt{(٣ + ٥)^2 + (-٢ - ٠)^2} = \sqrt{(٨)^2 + (-٢)^2}$

= $\sqrt{٦٤ + ٤} = \sqrt{٦٨}$ وحدة طول

ب جـ = $\sqrt{(-٥ - ٠)^2 + (٠ + ٧)^2} = \sqrt{(-٥)^2 + (٧)^2}$

= $\sqrt{٢٥ + ٤٩} = \sqrt{٧٤}$ وحدة طول

جـ د = $\sqrt{(٠ - ٨)^2 + (-٧ + ٩)^2} = \sqrt{(-٨)^2 + (٢)^2}$

= $\sqrt{٦٤ + ٤} = \sqrt{٦٨}$ وحدة طول

د أ = $\sqrt{(٨ - ٣)^2 + (-٩ + ٢)^2} = \sqrt{(٥)^2 + (٧)^2}$

= $\sqrt{٢٥ + ٤٩} = \sqrt{٧٤}$ وحدة طول

∵ أ ب = جـ د ، ب جـ = د أ ∴ أ ب جـ د متوازي أضلاع

مثال : إذا كان البعد بين النقطتين (أ ، ٥) ، (٣ أ – ١ ، ١) يساوي ٥ فأوجد قيمة أ

الحل : ∵ $\sqrt{(٣أ - ١ - أ)^2 + (١ - ٥)^2} = ٥$

∴ $\sqrt{(٢أ - ١)^2 + (-٤)^2} = ٥$ (بتربيع الطرفين)

$(٢أ - ١)^2 + ١٦ = ٢٥$

$(٢أ - ١)^2 = ٢٥ - ١٦$

$(٢أ - ١)^2 = ٩$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

٢ أ - ١ = ± ٣

٢ أ - ١ = ٣	٢ أ - ١ = -٣
٢ أ = ٤	٢ أ = -٢
أ = ٢	أ = -١

تمارين (٤)

س١) أوجد طول $\overline{أ ب}$ في كل من الحالات الآتية

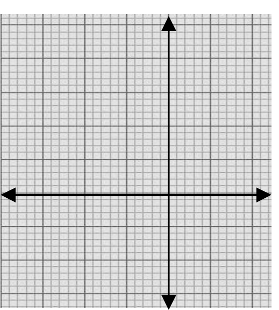
١) أ(١ ، ٢) ، ب (٤ ، ٦)

٢) أ(-٢ ، ٥) ، ب (٣ ، ٠)

٣) أ(-١ ، ٤) ، ب (-٣ ، ٢)

س٢) أثبت أن المثلث الذي رؤوسه النقط :
أ(٥ ، -٥) ، ب(-١ ، ٧) ، جـ(١٥ ، ١٥)
قائم الزاوية في ب ثم أوجد مساحته

س ٣) أثبت أن النقط : ٢ (- ١ ، ٤) ، ب (١ ، ١) ، ج (- ١ ، - ٢) ، د (- ٣ ، ١) هي رؤوس معين ومثله بيانياً ثم أوجد مساحته



الواجب المنزلي

س ١) أثبت أن النقط : ٢ (٠ ، ١) ، ب (٤ ، ٥) ، ج (١ ، ٨) ، د (- ٣ ، ٤) هي رؤوس مستطيل

س ٢) إذا كان البعد بين النقطتين (٢ ، ٧) ، (- ٢ ، ٣) يساوي ٥ فأوجد قيمة ٢

وَقُلْ رَبِّ زِدْنِي عِلْمًا

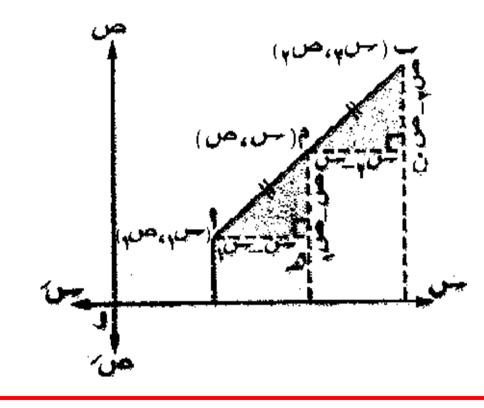
الحصة الخامسة

إحداثيا منتصف قطعة مستقيمة

إذا كانت : أ $(س_١ ، ص_١)$ ، ب $(س_٢ ، ص_٢)$

وكانت م منتصف $\overline{أب}$ حيث م (س ، ص)

فإن : $م = \left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢} \right)$



مثال : إذا كانت : أ(١ ، ٥) ، ب(٣ ، ١) ، م منتصف $\overline{أب}$ فأوجد احداثيي م

الحل :

$م = \left(\frac{١ + ٣}{٢} ، \frac{٥ + ١}{٢} \right) = (٢ ، ٣)$

مثال : إذا كانت : س(٣ ، -٢) ، ص(-١ ، -٤) ، م منتصف $\overline{س ص}$ فأوجد احداثيي م

الحل :

$م = \left(\frac{٣ + (-١)}{٢} ، \frac{(-٢) + (-٤)}{٢} \right)$

$= (١ ، -٣)$

مثال : إذا كانت جـ(١٠ ، -٤) هي نقطة منتصف $\overline{أب}$ حيث : أ(٤ ، -٢) فأوجد إحداثيي نقطة ب

الحل : بفرض أن ب (س ، ص)

∵ جـ منتصف $\overline{أب}$

∴ $\left(\frac{س + ٤}{٢} ، \frac{ص + (-٢)}{٢} \right) = (١٠ ، -٤)$

$\frac{س + ٤}{٢} = ١٠$	$\frac{ص - ٢}{٢} = -٤$
س + ٤ = ٢٠	ص - ٢ = -٨
س = ٢٠ - ٤	ص = -٨ + ٢
س = ١٦	ص = -٦

∴ ب = (١٦ ، -٦)

ملاحظة : إذا كان $\overline{أب}$ قطراً في الدائرة م ، فإن م مركز الدائرة هو نقطة منتصف $\overline{أب}$

مثال : إذا كان $\overline{أب}$ قطراً في الدائرة م حيث : أ(٤ ، -١) ، ب(-٢ ، ٧) فأوجد احداثيي نقطة م ومن ثم أوجد محيط الدائرة ومساحتها

الحل :

∵ $\overline{أب}$ قطراً في الدائرة م ∴ م منتصف $\overline{أب}$

$م = \left(\frac{٤ + (-٢)}{٢} ، \frac{-١ + ٧}{٢} \right) = (١ ، ٣)$

$نق = أ م = = \sqrt{(١ - ٤)^٢ + (٣ + ١)^٢}$

$= \sqrt{٩ + ١٦} = \sqrt{٢٥} = ٥$ وحدة طول

محيط الدائرة = ٢π نق = $٢ \times \pi \times ٥ = ١٠ \pi$ وحدة طول

مساحة الدائرة = π نق^٢ = $\pi \times ٥^٢ = ٢٥ \pi$ وحدة مربعة

مثال : أثبت أن النقط : أ(٣ ، -٢) ، ب(-٥ ، ٠) ، جـ(٠ ، -٧) ، د(٨ ، -٩) هي رؤوس متوازي أضلاع

الحل :

∴ قطري الشكل الرباعي أ ب جـ د هما $\overline{أجـ}$ ، $\overline{ب د}$

نقطة منتصف $\overline{أجـ}$ = $\left(\frac{٣ + ٠}{٢} ، \frac{(-٢) + (-٧)}{٢} \right)$

$= \left(\frac{٣}{٢} ، \frac{-٩}{٢} \right)$

نقطة منتصف $\overline{ب د}$ = $\left(\frac{-٥ + ٨}{٢} ، \frac{٠ + (-٩)}{٢} \right)$

$= \left(\frac{٣}{٢} ، \frac{-٩}{٢} \right)$

∴ نقطة منتصف $\overline{أجـ}$ هي نفسها نقطة منتصف $\overline{ب د}$

∵ القطران ينصف كلاً منهما الآخر ∴ أ ب جـ د متوازي أضلاع

مثال : أثبت أن المثلث الذي رؤوسه : ٢ (٣ ، ٢) ، ب (٢ ، - ١) ، جـ (- ٤ ، ١) قائم الزاوية في ب ، ثم أوجد إحداثيي نقطة د التي تجعل الشكل ٢ ب جـ د مستطيل

الحل :

٢ ب = $\sqrt{(٣ - ٢)^2 + (٢ + ١)^2}$ = $\sqrt{(١)^2 + (٣)^2}$

= $\sqrt{١ + ٩}$ = $\sqrt{١٠}$ وحدة طول

ب جـ = $\sqrt{(-٤ - ٢)^2 + (١ + ١)^2}$ = $\sqrt{(-٦)^2 + (٢)^2}$

= $\sqrt{٣٦ + ٤}$ = $\sqrt{٤٠}$ وحدة طول

٢ جـ = $\sqrt{(٣ + ٤)^2 + (٢ - ١)^2}$ = $\sqrt{(٧)^2 + (١)^2}$

= $\sqrt{٤٩ + ١}$ = $\sqrt{٥٠}$ وحدة طول

∵ $(٢ ب)^2 + (ب جـ)^2$ = ١٠ + ٤٠ = ٥٠ ، $(٢ جـ)^2$ = ٥٠

∴ $(٢ ب)^2 + (ب جـ)^2 = (٢ جـ)^2$

∴ Δ ٢ ب جـ قائم الزاوية في ب

بفرض أن د (س ، ص) لكي يكون الشكل مستطيل

نقطة منتصف $\overline{٢ جـ}$ = نقطة منتصف $\overline{ب د}$

نقطة منتصف $\overline{٢ جـ}$ = $\left(\frac{٣ - ٤}{٢} ، \frac{٢ + ١}{٢}\right)$ = $\left(\frac{-١}{٢} ، \frac{٣}{٢}\right)$

نقطة منتصف $\overline{ب د}$ = $\left(\frac{س + ٢}{٢} ، \frac{ص - ١}{٢}\right)$

∴ $\left(\frac{س + ٢}{٢} ، \frac{ص - ١}{٢}\right)$ = $\left(\frac{-١}{٢} ، \frac{٣}{٢}\right)$

$\frac{س + ٢}{٢} = \frac{-١}{٢}$

٢ س + ٤ = - ٢

٢ س = - ٢ - ٤

٢س = - ٦

س = - ٣

$\frac{ص - ١}{٢} = \frac{٣}{٢}$

٢ ص - ٢ = ٦

٢ ص = ٦ + ٢

٢ ص = ٨

ص = ٤

∴ د (- ٣ ، ٤)

تمارين (٥)

س١) أوجد إحداثيي نقطة منتصف $\overline{٢ ب}$ في كل من الحالات الآتية

١) ٢ (٣ ، ٥) ، ب (٧ ، ١)

٢) ٢ (٢ ، ٤) ، ب (٦ ، ٠)

س٢) أوجد قيمة س ، ص إذا كانت النقطة (٣ ، - ٢) منتصف القطعة المستقيمة المرسومة بين (س ، ٢) ، (٣ ، ص)

س٣) إذا كانت النقط : ٢ (٣، ٢) ، ب (٤ ، -٣) ، جـ (- ١ ، - ٢) ، د (- ٢ ، ٣) هي رؤوس معين فأوجد :

١) إحداثيي نقطة تقاطع القطرين

٢) مساحة المعين ٢ ب جـ د

س٤) أثبت أن المثلث الذي رؤوسه: ٩ (- ١ ، ٤) ،
ب (٣ ، ١) ، جـ (- ٥ ، ١) متساوي الساقين
وأوجد مساحته

الواجب المنزلي

س١) إذا كانت : ٩ (١ ، - ٦) ، ب (٩ ، ٢) فأوجد إحداثيات النقط التي تقسم $\overline{٩ب}$ إلى أربعة أجزاء متساوية في الطول

س٢) أثبت أن المثلث الذي رؤوسه: ٩ (- ٣ ، ٠) ،
ب (٣ ، ٤) ، جـ (١ ، - ٦) متساوي الساقين وأوجد مساحته

التفاؤل هو الوقود الذي يجعلك تستمر حتى عندما تشعر بالتعب

الحصة السادسة

ميل الخط المستقيم

تذكر أن :

١) ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين $(س_١ ، ص_١)$ ، $(س_٢ ، ص_٢)$

الميل = فرق الصادات / فرق السينات

$$م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$$

مثال : إذا كانت

أ = (٢ ، ٥) ، ب = (٤ ، ٧) أوجد : ميل أ ب ؟

الحل : ميل أ ب = $\frac{٧ - ٥}{٤ - ٢} = \frac{٢}{٢} = ١$

٢)ميل اي مستقيم أفقي يوازي محور السينات = صفر

٣)ميل اي مستقيم رأسي يوازي محور الصادات غير معرف

٤) من العلاقة : أ س + ب ص = جـ

يمكننا ايجاد الميل = $\frac{- أ}{ب}$

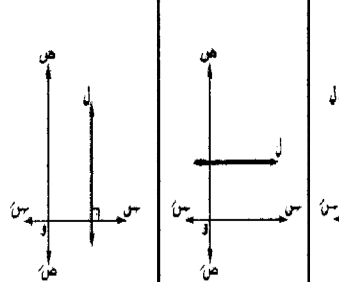
مثال : من العلاقة ٢س - ص = ١

الميل = $\frac{-٢}{-١}$ = ٢

زاوية ميل الخط المستقيم

هي الزاوية الموجبة التي يصنعها المستقيم مع الإتجاه الموجب لمحور السينات

① حادة	② منفرجة	③ صفرية	④ قائمة
إذا كان الميل موجبًا	إذا كان الميل سالبًا	إذا كان الميل = ٠	إذا كان الميل غير معرف



*ويمكن ايجاد ميل الخط المستقيم بمعرفة الزاوية التي يصنعها المستقيم مع الإتجاه الموجب لمحور السينات

ميل الخط المستقيم = طا هـ

مثال : أوجد ميل المستقيم الذي يصنع زاوية موجبة مع الإتجاه الموجب لمحور السينات قياسها

١) ٤٥° ٢) ١٢٤° ١٥َ ١٢ً

الحل :

١) ميل الخط المستقيم = طا ٤٥° = ١

ابدأ ← tan 4 5 =

٢) ميل الخط المستقيم = طا ١٢٤° ١٥َ ١٢ً = -١.٤٦٨٥

ابدأ ← tan 1 2 4 °''' 1 5 °''' 1 2 °''' =

مثال : أوجد قياس الزاوية الموجبة التي يصنعها المستقيم مع الإتجاه الموجب لمحور السينات إذا كان ميل المستقيم

١) ١,٤٨٦ ٢) $-\frac{١}{\sqrt{٣}}$

الحل :

١) ∵ ميل الخط المستقيم = طا هـ = ١.٤٨٦ (موجب)

∴ هـ حادة ، ∴ ق(هـ) = ٤١ ً ٣ َ ٥٦ ً

ابدأ ← shift tan 1 . 4 8 6 = °'''

٢) ∵ ميل الخط المستقيم = طا هـ = $-\frac{١}{\sqrt{٣}}$ (سالب)

∴ هـ منفرجة

وباستخدام الآلة بالتتابع الآتي نجد أنها تعطي (- ٣٠ °)

ابدأ ← shift tan (-) 1 ÷ √ 3 =

، ∴ ق(هـ) = ١٨٠ ° – ٣٠ ° = ١٥٠ °

مثال : أوجد قياس الزاوية الموجبة التي يصنعها المستقيم ل مع الإتجاه الموجب لمحور السينات إذا كان المستقيم ل يمر بالنقطتين : (٢ ، ٥) ، (٤ ، ٧)

الحل :

∵ الميل = $\frac{٧ - ٥}{٤ - ٢} = \frac{٢}{٢} = ١$

∵ ميل الخط المستقيم = طا هـ = ١ (موجب)

∴ هـ حادة ، ∴ ق(هـ) = ٤٥°

ابدأ ← shift tan 1 =

تمارين

س١) أوجد ميل المستقيم الذي يصنع زاوية موجبة مع الإتجاه الموجب لمحور السينات قياسها
١) ٣٠°　　　　٢) ٤٢ َ ٨٦°

س٢)أوجد قياس الزاوية الموجبة التي يصنعها المستقيم مع الإتجاه الموجب لمحور السينات إذا كان ميل المستقيم
١) ٠,٣　　　　٢) - ١

س٣) اكمل مايلي :

١)ميل المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ١) ، (٤ ، ٢) هو ....

٢) ميل المستقيم الموازي لمحور السينات = ...

٣) ميل المستقيم العمودي علي محور السينات = ...

٤) ميل المستقيم الذي معادلته ٢س+٣ص = ٥ هو ....

٥) ميل المستقيم الذي يصنع زاوية قياسها ٤٥° يساوي ....

٦)ميل المستقيم المار بالنقطتين (٥ ، ٣) ،(٢ ، -١) هو ....

الواجب المنزلي

س١) أوجد ميل المستقيم الذي يصنع زاوية موجبة مع الإتجاه الموجب لمحور السينات قياسها
١) ٦٠°　　　　٢) ١٣٥°

س٢)أوجد قياس الزاوية الموجبة التي يصنعها المستقيم مع الإتجاه الموجب لمحور السينات إذا كان ميل المستقيم
١) ١,٠٢٤٦　　　　٢) - $\sqrt{٣}$

اوجد الميل في الحالات الاتية:- المستقيم

المار بالنقطتين (٢ ، -١) ، (٤ ، ٣)

الذي معادلته ٣س + ص = ٥

يصنع زاوية قياسها ٦٠°

الحصة السابعة

العلاقة بين ميلى مستقيمين متوازيين :

إذا كان $ل_١$ ، $ل_٢$ مستقيمين متوازيين ميلاهما $م_١$ ، $م_٢$

فإن : $م_١ = م_٢$

المستقيمان المتوازيان ميلاهما متساويان

والعكس صحيح



إذا كان : $م_١ = م_٢$

فإن : $ل_١ // ل_٢$

أي أنه إذا تساوى ميلا مستقيمين في المستوى كان المستقيمان متوازيان

مثال : أثبت أن المستقسم الذي يمر بالنقطتين : (٢ ، ٣) ، (-١ ، ٦) يوازي المستقيم الذي يصنع مع الإتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها ١٣٥°

الحل : ميل المستقيم الأول $م_١ = \frac{٦ - ٣}{-١ - ٢} = \frac{٣}{-٣} = -١$

ميل المستقيم الثاني $م_٢$ = طا ١٣٥° = -١

∵ $م_١ = م_٢$ ∴ المستقيمان متوازيان

مثال : أثبت أن النقاط : ٩ (-١ ، ٦) ، ب (٣ ، -٤) ، جـ (٢ ، -١.٥) تقع على استقامة واحدة

الحل : ميل ٩ ب = $\frac{-٤ - ٦}{٣ - (-١)} = \frac{-١٠}{٤} = \frac{-٥}{٢} = -٢.٥$

ميل ب جـ = $\frac{-١.٥ - (-٤)}{٢ - ٣} = \frac{٢.٥}{-١} = -٢.٥$

∵ ميل ٩ ب = ميل ب جـ

∴ النقاط تقع على استقامة واحدة

مثال : إذا كانت : ٩ (-١ ، ٢) ، ب (٢ ، ٣) ، جـ (-٤ ، ١) ، د (س ، ٢) أربع نقاط في مستوى متعامد وكان ٩ ب // جـ د فأوجد قيمة س

الحل : ∵ ٩ ب // جـ د

∴ ميل ٩ ب = ميل جـ د

∴ $\frac{٣ - ٢}{٢ - (-١)} = \frac{٢ - ١}{س - (-٤)}$

$\frac{١}{٣} = \frac{١}{س + ٤}$

س + ٤ = ٣

س = ٣ – ٤   س = -١

العلاقة بين ميلى مستقيمين متعامدين :

إذا كان $ل_١$ ، $ل_٢$ مستقيمين متعامدين ميلاهما $م_١$ ، $م_٢$

فإن : $م_١ × م_٢ = -١$

والعكس صحيح إذا كان : $م_١ × م_٢ = -١$

فإن : $ل_١ ⊥ ل_٢$

◄◄ **ملحوظة :** إذا كان ميل مستقيم = $\frac{٩}{ب}$

فإن : ميل المستقيم العمودي عليه = $\frac{-ب}{٩}$

فمثلاً : إذا كان ميل مستقيم = $\frac{٣}{٢}$

فإن : ميل المستقيم العمودي عليه = $\frac{-٢}{٣}$

مثال : أثبت أن المستقسم الذي يمر بالنقطتين : (-١ ، ٤) ، (٣ ، ٧) يكون عمودياً على المستقيم المار بالنقطتين : (١ ، ١) ، (٤ ، -٣)

الحل :

ميل المستقيم الأول $م_١ = \frac{٧ - ٤}{٣ + ١} = \frac{٣}{٤}$

ميل المستقيم الثاني $م_٢ = \frac{-٣ - ١}{٤ - ١} = \frac{-٤}{٣}$

∵ $م_١ × م_٢ = \frac{٣}{٤} × \frac{-٤}{٣} = -١$

∴ المستقيمان متعامدان

مثال : إذا كانت النقاط : ٩ (١ ، ٧) ، ب (٢ ، ٤) ، جـ (٥ ، ص) تمثل رؤوس مثلث قائم الزاوية في ب ، فأوجد قيمة ص

الحل :

ميل ٩ ب = $\frac{٤ - ٧}{٢ - ١} = \frac{-٣}{١} = -٣$

ميل ب جـ = $\frac{ص - ٤}{٥ - ٣} = \frac{ص - ٤}{٣}$

∵ ٩ ب ⊥ ب جـ

∴ ميل ٩ ب × ميل جـ د = -١

∴ $-٣ × \frac{ص - ٤}{٣} = -١$

ص – ٤ = ١

ص = ١ + ٤

ص = ٥

تمارين

١) أثبت أن المستقيم الذي معادلته ٢ س + ص + ٨ = ٠
عمودي على المستقيم المار بالنقطتين : ا(٢ ، ٣) ،
ب (ـ ٢ ، ١)

٢) إذا كان المستقيم : ٩ س + ٢ ص ـ ٣ = ٠ موازياً
المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، ٣) ، (١ ، ٥)
الواقعتين في نفس المستوى فأوجد قيمة : ٩

٣) أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين : (- ٣ ، - ٢) ،
(٤ ، ٥) يوازي المستقيم الذي يصنع مع الإتجاه
الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٤٥°

٤) أثبت أن النقاط : ٩(٤، ٣) ، ب (١ ، ١) ،
جـ (- ٥ ، - ٣) تقع على استقامة واحدة

١) إذا كان المثلث الذي رؤوسه النقاط : ٩(٣ ، - ١)
، ب (س ، ٣) ، جـ (٥ ، ٣) قائم الزاوية في ٩ ،
فأوجد قيمة : س ثم أوجد مساحته

النجاح ليس هدفًا، بل هو رحلة ممتعة

الواجب المنزلي

١) أثبت أن المستقيم الذي معادلته : ٢ س + ص + ٨ = ٠ عمودي على المستقيم المار بالنقطتين : ٩ (٢ ، ٣) ، ب (- ٢ ، ١)

٢) أثبت أن النقاط : ٩ (٥ ، - ٣) ، ب (٦ ، - ٤) ، جـ (٧ ، - ٥) تكون على استقامة واحدة

الحصة الثامنة

لكى نثبت أن الشكل شبه منحرف :

نثبت أن ضلعان فيه متوازيان والآخران غير متوازيان

لكى نثبت أن الشكل متوازى أضلاع :

نثبت أحد الشروط الآتية

- ✓ كل ضلعين متقابلين متوازيان
- ✓ كل ضلعين متقابلين متساويين في الطول
- ✓ أي ضلعان متقابلان متوازيان ومتساويان
- ✓ القطران ينصف كل منهما الآخر

لكى نثبت أن الشكل مستطيل :

نثبت أنه متوازي أضلاع أولاً ثم نثبت أحد هذين الشرطين :

- ✓ ضلعان متجاوران فيه متعامدان
- ✓ قطراه متساويان في الطول

لكى نثبت أن الشكل معين :

نثبت أنه متوازي أضلاع أولاً ثم نثبت أحد هذين الشرطين :

١) ضلعان متجاوران فيه متساويان في الطول
٢) قطراه متعامدان

لكى نثبت أن الشكل مربع :

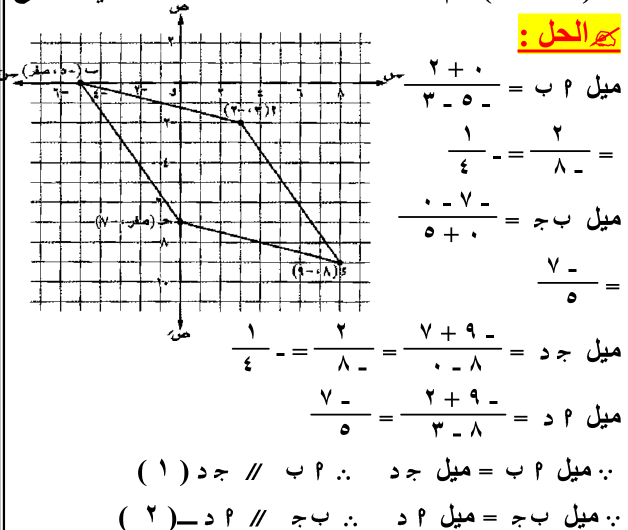
نثبت أنه متوازي أضلاع أولاً ثم نثبت أحد هذين الشرطين :

١) ضلعان متجاوران فيه متساويان في الطول ، احدى زواياه قائمة
٢) قطراه متعامدان ، ومتساويان في الطول
٣) احدى زواياه قائمة ، وقطراه متعامدان
٤) ضلعان متجاوران فيه متساويان في الطول ، وقطراه متساويان في الطول

مثال : على مستوى احداثي متعامد مثل النقاط :

٩ (٣ ، - ٢) ، ب (- ٥ ، ٠) ، جـ (٠ ، - ٧) ، د (٨ ، - ٩) ثم أثبت أن الشكل ٩ ب جـ د متوازي أضلاع

الحل :



ميل ٩ ب = $\frac{٠ + ٢}{-٥ - ٣}$ = $\frac{٢}{-٨}$ = $-\frac{١}{٤}$

ميل ب جـ = $\frac{-٧ - ٠}{٠ + ٥}$ = $\frac{-٧}{٥}$

ميل جـ د = $\frac{-٩ + ٧}{٨ - ٠}$ = $\frac{٢}{-٨}$ = $-\frac{١}{٤}$

ميل ٩ د = $\frac{-٩ + ٢}{٨ - ٣}$ = $\frac{-٧}{٥}$

∵ ميل ٩ ب = ميل جـ د ∴ ٩ ب // جـ د (١)

∵ ميل ب جـ = ميل ٩ د ∴ ب جـ // ٩ د (٢)

من (١) ، (٢) ∴ ٩ ب جـ د متوازي أضلاع

مثـال : أثبت أن النقط : ٩ (٢ ، - ٢) ، ب (٨ ، ٤) ، جـ (٥ ، ٧) ، د (- ١ ، ١) هي رؤوس مستطيل

الحل :

ميل ٩ ب = $\frac{-٢ - ٤}{٢ - ٨}$ = $\frac{-٦}{-٦}$ = ١

ميل ب جـ = $\frac{٤ - ٧}{٨ - ٥}$ = $\frac{-٣}{٣}$ = - ١

ميل جـ د = $\frac{٧ - ١}{٥ + ١}$ = $\frac{٦}{٦}$ = ١

ميل ٩ د = $\frac{-٢ - ١}{٢ + ١}$ = $\frac{-٣}{٣}$ = - ١

∵ ميل ٩ ب = ميل جـ د ∴ ٩ ب // جـ د ـــــــ(١)

∵ ميل ب جـ = ميل ٩ د ∴ ب جـ // ٩ د ـــــــ(٢)

من (١) ، (٢) ∴ ٩ ب جـ د متوازي أضلاع

∵ ميل ٩ ب × ميل ب جـ = ١ × - ١ = - ١

∴ ٩ ب ⊥ ب جـ ∴ ٩ ب جـ د مستطيل

تمارين

س١) أثبت أن النقط : ٩ (٣، ٢) ، ب (٤ ، -٣) ، جـ (- ١ ، - ٢) ، د (- ٢ ، ٣) هي رؤوس معين

س٢) أثبت أن المثلث الذي رؤوسه : ٩ (٦ ، ٠) ، ب (٢ ، - ٤)، جـ (- ٤ ، ٢) قائم الزاوية في ب

الواجب المنزلي

س١) بين نوع المثلث الذي رؤوسه النقاط : ٩ (- ٢ ، ٤) ، ب (٣ ، - ١) ، جـ (٤ ، ٥) من حيث أضلاعه

الحصة الثامنة

معادلة الخط المستقيم

معادلة المستقيم بمعلومية الميل والجزء المقطوع من محور الصادات

هو علاقة بين متغيرين س ، ص بحيث تأخذ هذه العلاقة الشكل التالي :

ص = م س + جـ

حيث: م ميل الخط المستقيم
جـ الجزء الذي يقطعه المستقيم من محور الصادات والمستقيم يمر بالنقطة (٠ ، جـ)
(راجع طرق ايجاد الميل من الحصة السابقة)

مثال : أوجد معادلة المستقيم

١) الذي ميله = $-\frac{٣}{٤}$ ويقطع من الجزء الموجب لمحور الصادات ٣ وحدات طولية

٢) الذي ميله ٢ ويقطع من الجزء السالب لمحور الصادات ٧ وحدات طولية

الحل : ص = م س + جـ

١) ∵ م = $-\frac{٣}{٤}$ ، جـ = ٣

∴ المعادلة هي : ص = $-\frac{٣}{٤}$ س + ٣

٢) ∵ م = ٢ ، جـ = - ٧

∴ المعادلة هي : ص = ٢س – ٧

مثال : أوجد معادلة المستقيم الذي يصنع مع الإتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها ١٣٥° ويقطع من الجزء الموجب لمحور الصادات ٧ وحدات طولية

الحل :

الميل (م) = ظا هـ = ظا ١٣٥° = - ١
، جـ = ٧

∵ ص = م س + جـ

∴ المعادلة هي : ص = - س + ٧

ملاحظات :

١) معادلة المستقيم الذي يمر بنقطة الأصل (٠،٠) هـــي ص = م س : م الميل

٢) معادلة محور السينات هي ص = ٠

٣) معادلة محور الصادات هي س = ٠

٤) معادلة المستقيم الذي يوازي محور السينات ويمر بالنقطة (٠ ، ل) هـــي ص = ل (العدد الذي مع ص)

٥) معادلة المستقيم الذي يوازي محور الصادات ويمر بالنقطة (ك ، ٠) هـــي س = ك (العدد الذي مع س)

مثال : أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (١ ، - ١) ، (٢ ، ٢)

الحل :

الميل (م) = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٢ + ١}{٢ - ١} = ٣$

∵ ص = م س + جـ

∴ المعادلة هي : ص = ٣ س + جـ بالتعويض بـ (٢ ، ٢)

٢ = ٣ × ٢ + جـ

٢ – ٦ = جـ ⇐ جـ = - ٤

∴ المعادلة هي : ص = ٣ س - ٤

مثال : أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (١ ، ٢) موازياً المستقيم : ٢ س + ٣ ص – ٦ = ٠

الحل :

ميل المستقيم المعطى = $\frac{- \text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{- ٢}{٣}$

ميل المستقيم المطلوب = $\frac{- ٢}{٣}$ (لأنه موازى)

∵ ص = م س + جـ

∴ المعادلة هي : ص = $\frac{- ٢}{٣}$ س + جـ

بالتعويض بـ (١ ، ٢)

٢ = $\frac{- ٢}{٣}$ × ١ + جـ (بالضرب × ٣)

٦ = - ٢ + ٣ جـ

٦ + ٢ = ٣ جـ

٨ = ٣ جـ ⇐ جـ = $\frac{٨}{٣}$

∴ المعادلة هي : ص = $\frac{- ٢}{٣}$ س + $\frac{٨}{٣}$

****

ويمكننا إيجاد المعادلة إذا كان (س١ ، ص١) نقطة يمر بهما الخط المستقيم الذي ميلة (م)

من العلاقة : $\frac{ص - ص_1}{س - س_1}$ = الميل (م)

حل آخر بدل التعويض لإيجاد قيمة جـ

$\frac{ص - ٢}{س - ١} = \frac{- ٢}{٣}$

٣ ص – ٦ = - ٢ س + ٢

∴ المعادلة هي : ٣ ص = - ٢ س + ٨

مثـال : أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، ٣) عمودياً على المستقيم المار بالنقطتين : (٣ ، -٤) ، (٥ ، -٣)

الحل : ميل المستقيم العودي= $\frac{- ٣ + ٤}{٥ - ٣} = \frac{١}{٢}$

ميل المستقيم المطلوب = $\frac{- ٢}{١}$ = - ٢ (لأنه عمودي)

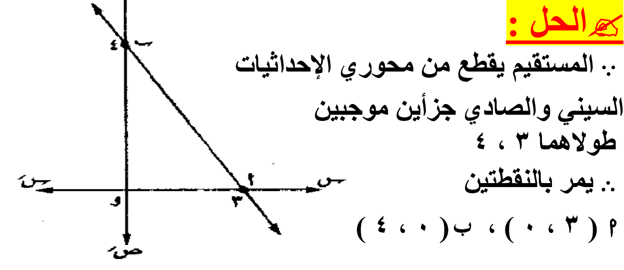
بإستخدام العلاقة $\frac{ص - ٣}{س - ٢} = \frac{- ٢}{١}$

ص – ٣ = - ٢ س + ٤

∴ المعادلة هي : ص = - ٢ س + ٧

مثـال : أوجد معادلة المستقيم الذي يقطع من محوري الإحداثيات السيني والصادي جزأين موجبين طولاهما ٣ ، ٤ على الترتيب ثم أوجد مساحة المثلث المحصور بين المستقيم ومحوري الإحداثيات

الحل :



∵ المستقيم يقطع من محوري الإحداثيات السيني والصادي جزأين موجبين طولاهما ٣ ، ٤

∴ يمر بالنقطتين

أ (٣ ، ٠) ، ب (٠ ، ٤)

الميل (م)= $\frac{٤ - ٠}{٠ - ٣} = \frac{- ٤}{٣}$ ، جـ = ٤

∵ ص = م س + جـ

∴ المعادلة هي : ص = $\frac{- ٤}{٣}$ س + ٤

ثانياً :

مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ القاعدة × الإرتفاع

= $\frac{١}{٢}$ × ٣ × ٤ = ٦ وحدة مربعة

تمارين

س ١) أوجد معادلة المستقيم الذي

١) ميله = - ٣ ويقطع من الجزء الموجب لمحور الصادات ٥ وحدات طولية

٢) يقطع من محور ص ٣ وحدات موجبة وميله = ٣

٣) يقطع من محور ص ٣ وحدات سالبة وميله = $\frac{٢}{٣}$

٤) ميلة ٥ ويقطع من محور ص نفس الجزء الذي يقطعه المستقيم ص – س + ١ = ١

٥) يقطع من محور ص ٣ وحدات موجبة ويوازي المستقيم الذي معادلته ص = ٢ س + ١

٦) يمر بالنقطة (٢ ، ١) وعمودي على المستقيم الذي معادلته ٣ س + ١٥ ص = ٢

٧) يمر بالنقطتين (٢ ،٤) ، (- ١ ،٦)

٨) ميله = - ٢ ويمر بنقطة الأصل

٩) الذي يمر بمنتصف النقطتين (٣ ، ٦) ، (- ١ ، ٤) عمودياً على المستقيم الذي معادلته : ٢ ص – ٤ س + ١ = ٠

١٠) إذا كان : ل (٥ ، - ٦) ، م (٣ ، ٧) ، ن (١ ، - ٣) أوجد معادلة الخط المستقيم الذي يمر بالنقطة ل وبنقطة منتصف $\overline{\text{م ن}}$

هذه الفترة في حياتك هي كنز لا يعاد، فاستثمرها بحذر وحكمة، فإما أن تكون قصة نجاحك الرائعة أو تظل وقتًا فارغًا لا قيمة له

الحصة الثامنة

مراجعة على الوحدة الخامسة
الهندسة التحليلية

أولا : الأسئلة الموضوعية

س ١) أكمل ما يأتي :

(١) البعد بين النقطتين : (٩ ، ٠) ، (٤ ، ٠) يساوى ....

(٢) البعد بين النقطتين : (٠ ، -١١) ، (٠ ، -٥) يساوى ....

(٣) البعد بين النقطة (٤ ، -٣) ونقطة الأصل يساوى ....

(٤) البعد بين النقطتين : (٥ ، ٠) ، (٠ ، -١٢) يساوى ....

(٥) في المربع أ ب حـ ء إذا كان : أ (٢ ، -٥) ، ب (-١ ، -١)

فإن محيط المربع = ... وحدة طول ، ومساحته .... وحدة مساحة.

(٦) منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين : (٢ ، ٥) ، (٤ ، ٣) هي النقطة ....

(٧) طول قطر الدائرة التي مركزها (٨ ، ٥) وتمر بالنقطة (٤ ، ٢) يساوى ....

(٨) إذا كان البعد بين النقطتين : (أ ، ٠) ، (٠ ، ١) هو وحدة طول واحدة فإن : أ = ...

(٩) إذا كانت : (٢ ، ١) منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ حيث أ (٣ ، -٤) ، ب (م ، ٦) فإن : م = ...

(١٠) إذا كانت نقطة الأصل هي منتصف القطعة المستقيمة $\overline{\text{أ ب}}$ حيث : أ (٥ ، -٢)

فإن : ب = ...

(١١) إذا كان : $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{حـ ء}}$ وكان ميل $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ = ٠,٧٥ فإن : ميل $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ يساوى ....

(١٢) إذا كان : $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ وكان ميل $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ = ٠,٥ فإن : ميل $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ يساوى ....

(١٣) ميل المستقيم الموازى للمستقيم المار بالنقطتين (٢ ، ٣) ، (-٢ ، ٣) يساوى ....

(١٤) إذا كان المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ يوازى محور السينات حيث : أ (٨ ، ٣) ، ب (٢ ، ك)

فإن : ك = ...

(١٥) إذا كان المستقيم $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ يوازى محور الصادات حيث : حـ (م ، ٤) ، ء (-٥ ، ٧)

فإن : م = ...

(١٦) أ ب حـ مثلث قائم الزاوية في ب فيه : أ (١ ، ٤) ، ب (-١ ، -٢)

فإن ميل $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ يساوى ....

ثانيا: الأسئلة المقالية

س ١) أوجد طول $\overline{\text{م ن}}$ في كل من الحالات الآتية :

١) م (٢ ، - ١) ، ن (٥ ، ٣)

٢) م (٧ ، - ٣) ، ن (٠ ، ٤)

س ٢) أوجد احداثيي نقطة منتصف $\overline{\text{أ ب}}$

١) أ (٢ ، ٤) ، ب (٦ ، ٠)

٢) أ (٧ ، - ٥) ، ب (- ٣ ، ٥)

س ٣) إذ كانت جـ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ فأوجد س ، ص

١) أ (١ ، ٥) ، ب (٣ ، ٧) ، جـ (س ، ص)

٢) ٩ (- ٣ ، ص) ، ب (٩ ، ١١) ، ﺟ (س ، - ٣)

٣) ٩ (س ، ٣) ، ب (٦ ، ص) ، ﺟ (٤ ، ٦)

س ٤) أوجد ميل الخط المستقيم الذي يصنع زاوية موجبة مع الإتجاه الموجب لمحور السينات قياسها :

١) ٣٠ ° ٢) ٤٥ ° ٣) ٦٠ °

س ٥) أوجد قياس الزاوية الموجبة التي يصنعها المستقيم الذي ميله (م) مع الإتجاه الموجب لمحور السينات :

١) م = ٠,٣٦٧٣ ٢) م = - ٣,١٦٤٨

س ٦) إذا كان بعد النقطة (س ، ٥) عن النقطة (٦ ، ١) يساوي ٢ $\sqrt{٥}$ فاحسب قيمة س

س ٧) بين أن النقاط : ٩ (٠ ، ٢) ، ب (٤ ، ٨) ، ﺟ (٦ ، ١١) تقع على استقامة واحدة أم لا ؟

س ٨) أثبت أن النقاط : ٩ (ـ ٢ ، ٥) ، ب (٣ ، ٣) ، جـ (ـ ٤ ، ٢) ، د (ـ ٩ ، ٤) هي رؤوس متوازي أضلاع

س ٩) أوجد معادلة المستقيم الذي يقطع جزءاً سالباً من محور الصادات مقداره ٣ وعمودي على المستقيم : ص = ٢ س ــ ٥

س ١٠) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، ـ ٥) ويوازي المستقيم : س + ٢ ص ــ ٧ = ٠

احرص على اختيار أصدقاء يلهمونك ويشجعونك على النجاح، وتجنب من يثقلون عبئك ويعيقون تقدمك

مراجعة على المنهج بالكامل

أكمل ما يأتي :

١) إذا كان : $\frac{أ}{٢} = \frac{ب}{٣} = ٥$ فإن أ + ب = ...

٢) إذا كان : ν (س) = ٣ ، ν (س × ص) = ٦

فإن : ν (ص) = ...

٣) المدى لمجموعة القيم : ٢ ، ٩ ، ٦ ، ١٦ ، ٨ هو

....

٤) إذا كانت : ٤ ، ٦ ، س كميات متناسبة

فإن س = ...

٥) الجذر التربيعي الموجب لمتوسط مربعات إنحرافات

القيم عن وسطها الحسابي يسمى ....

٦) إذا كان : $\frac{أ}{\sqrt{٣} - \sqrt{٢}} = \frac{ب}{\sqrt{٣} + \sqrt{٢}} = ١$

فإن : أ ب =.........................

٧) إذا كان : (٢ س ، ٤) = (٨ ، ص + ١)

فإن : $\sqrt{س^٢ + ص^٢}$ ....

٨) الوسط المتناسب الموجب بين : ٤ $أ^٢$ ، ٢٥ $ب^٤$ هو

....

٩) إذا كانت : ٣ س ص = ٨ فإن : ص $\propto$ ....

١٠)

١١) النقطة (٥ ، – ٣) تقع في الربع ....

١٢) أبسط وأسهل مقاييس التشتت هو ....

١٣) إذا كان : د (س) = $س^٢$ - س + ٣

فإن : د (- ٢) = ...

١٤) العلاقة بين المسافة والزمن عند ثبوت السرعة

تسمى تغير ....

١٥) الدالة الخطة المعرفة بالقاعدة ص = ٢ س - ٢

يمثلها بيانياً خط مستقيم يقطع محور الصادات في

النقطة ....

١٦) المدى لمجموعة القيم : ٧ ، ٤ ، ٩ ، ٥ ، ١٣

هو ....

١٧) الدالة د حيث د (س) = $س^٥$ (س + ٢)

كثيرة حدود من الدرجة ....

١٨) الدالة الخطية المعرفة بالقاعدة : ص = ٣ س – ٢
يمثلها بيانياً خط مستقيم يقطع محور الصادات
في النقطة ....

١٩) إذا كان أ د = ب جـ فإن : $\frac{أ}{جـ}$ = ...

٢٠) إذا كان : ١، س ، ٩ ، ص في تناسب متسلسل

فإن : س = ...

ص = ...

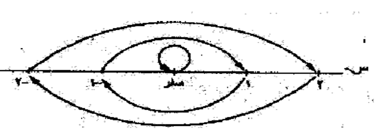
٢١) إذا كان : $\frac{أ}{ب} = \frac{٧}{٤}$ فإن : $\frac{أ٤}{ب}$ =..........

٢٢) إذا كان منحنى الدالة د حيث د (س) = س^٢ - أ

يمر بالنقطة (١ ، ٠) فإن : أ = ...

٢٣) الشكل المقابل هو المخطط السهمي لعلاقة تمثل

دالة على المجموعة س بيانها ....



٢٤) إذا كانت : د (س) = س – ٤

فإن : د (٧) = ...

٢٥) إذا كان : ص ∝ س^٢

فإن : $\frac{ص١}{ص٢}$ = ...

٢٦) الدالة د : د (س) = س^٢ + ٤ س كثيرة

حدود من الدرجة ....

٢٧) الزوج المرتب (س^٢ ، ص^٢) حيث س ≠ ٠ ،

ص ≠ ٠ يقع في الربع ....

٢٨) إذا كان ن (ص) = ٣ ، ن (س × ص) = ٦

فإن : ن (س^٢) = ...

٢٩) الدالة د : د (س) = ٣ تمثل بيانياً بخط مستقيم

يوازي ....

٣٠) إذا كان : (س – ١ ، ١١) =(٨ ، ص + ٣)

فإن : $\sqrt{س + ٢ ص}$ =...............

٣١) إذا كان : ٢ أ = ٣ ب فإن : $\frac{٥ب}{أ}$ = ...

٣٢) المعكوس الضربي للعدد ٢ هو ....

٣٣) اذا كان ٣ س = ٦ فإن ٥ س = ...

٣٤) اذا كان ٥ب = ٤٥ ، وكان أ ب = ١

فإن أ = ...

٣٥) $\sqrt{١٠٠ - ٦٤}$ = ١٠ - ....

٣٦) –٤ س^٢ ص^٣ × –٢ س^٣ ص^٤ = ...

٣٧) النقطة (–٢ ، ٣) تقع في الربع ....

٣٨) اذا كان س – ص = ٥ ، س^٢ – ص^٢ = ١٨

فإن س+ ص = ...

٣٩) اذا كان ٣$^{س+١}$ = ٨١

فإن س = ...

٤٠) اذا كان (١ – ك) هو المعكوس الجمعي للعدد $\frac{٤}{٥}$

فإن ك = ...

٤١) [١ ، ٤] – [١ ، ٤] = ...

٤٢) الحد الجبري أ ^{٢} ب ^{٣} جـ من الدرجة ....

٤٣) اذا كانت ١٥ هي اكبر مفردات مجموعة من القيم

مداها ٩ فإن اصغر قيم هذه المجموعة ....

٤٤) ٢٧ شهرا : ٣ سنوات = ... : .... في

ابسط صورة

٤٥) ن ∪ ن/ = ...

٤٦) ح – ن = ...

٤٧) اذا كان أ ، س ، ب ، ٢س

فإن أ : ب = ... : ....

٤٨) اذا كان س = ٤ ، ص = ٣

فإن (س – ص) ^{١٠} = ...

٤٩) اذا كان ٣ $^{س-٢}$ = ١

فإن س = ...

٥٠) اذا كان س^{٣} = ١٢٥ ، $\sqrt{ص}$ = ٥

فإن س + ص = ...

٥١) اذا كان أ + ب = أب= ٤

فإن أ^{٢} ب + أب^{٢} = ...

٥٢) اذا كان $\frac{٢س}{٥}$ = ٦

فإن ٣س = ...

س٢) اختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس :

١)إذا كان : (س – ١ ،١٣) = (٨ ، ص – ٣)

فإن :$\sqrt{س + ص}$ = ...

([$\sqrt{٥}$ ، ٥ ، ٧ ، ٢٥)

٢)إذا كانت :س= { ٤ ، ٧ ، ٩ }

ص = { ٣ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ } فأي من العلاقات الآتية تمثل

دالة من س إلى ص

({ (٤ ، ٣) ، (٧ ، ٦) ، (٩ ، ٦) } ،

{ (٤ ،٣) ، (٧ ، ٩) ، (٩ ، ٩) }

،{ (٤ ، ٣) ، (٤ ، ٦) ، (٧ ، ٨) }،

{ (٤ ، ٣) ، (٧ ، ٦) })

٣)إذا كان : $\frac{ص}{س}$ = ٥ فإن : ص ∝

(س ، $\frac{١}{س}$ ، س^{٥} ، $\frac{١}{س^{٥}}$)

٤)إذا كان : $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د} = \frac{٣}{٤}$ فإن : $\frac{أ + ج}{ب + د} =$ ...

($\frac{٣}{٤}$ ، $\frac{٧}{٤}$ ، $\frac{٣}{٧}$ ، $\frac{٩}{١٦}$)

٥)أي من العلاقات التالية تمثل تغير عكسي بين المتغيرين س ، ص ؟

(ص = $\frac{س}{٧}$ ، س ص = ٧ ، ص = ٧ س ، $\frac{ص}{س} = \frac{٧}{٢}$)

٦)أي من الازواج المرتبة الآتية ينتمي إلى { ٢ } × [٠ ، ٣] ؟

((٠ ، ٢) ، (٠ ، ٣) ، (٢ ، ٤) ، (٢ ، ١))

٧)إذا كانت ع دالة من س إلى ص حيث

س = { ٢ ، ٤ ، ٥ } ، ص = { ٦ ، ٧ }

وكانت ع = { (٢ ، ٦) ، (ب ، ٦) ، (٥، ٦) }

فإن : ب = ... (٤ ، ٥ ، ١٢ ،٦)

٨)إذا كانت : د (س) = س – ١

فإن : ٢ د (٠) = ...

(صفر ، – ٢ ، – ١ ، ٢)

٩)إذا كانت جميع قيم المفردات متساوية في القيمة فإن

($\overline{س}$ = ٠ ، σ = . ، س – $\overline{س}$ > ٠ ، س – $\overline{س}$ < ٠)

١٠) نسبة مساحة منطقة مربعة طول ضلعها ل سم إلى

مساحة منطقة مربعة أخرى طول ضلعها ٢ ل سم كنسبة

....

(١ : ٢ ، ١ : ٤ ، ل : ٤ ، ٤ : ١)

١١)إذا أجاب أحمد عن ٦٠ % من أسئلة اختبار ما إجابات صحيحة ، وكان عدد الأسئلة التي أجاب عنها خطأ هو عشرة أسئلة فإن عدد اسئلة الإختبار يساوي .... سؤال

(٢٤ ، ١٥ ، ٢٥ ، ٥٠)

١٢)إذا كانت النقطة (س ، ص) تقع في الربع الثالث فإن

س ص ..... صفر

(< ، > ، = ، ⩾)

١٣)الوسط المتناسب بين العددين ٣ ، ٢٧ هي

....

(– ٩ ، ٩ ، ± ٩ ، ٢١)

١٤) إذا كانت ص تتغير عكسياً مع س

وكانت س = $\sqrt{٣}$ عندما ص = $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$

فإن ثابت التناسب = ...

($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٢}{٣}$ ، ٢ ، ٦)

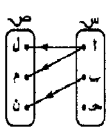
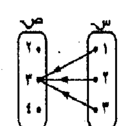
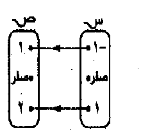
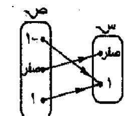
١٥) الدرجة الأكثر تكراراً لمجموعة من البيانات هي

(الوسيط ، المدى ، المنوال ، الوسط الحسابي)

١٦) أي من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية تمثل دالة كثيرة حدود ؟

(د(س)= $\frac{١}{س}$ ، د(س)= $\frac{س^٢}{س}$ ، د(س)= ٣ س$^{-١}$ ، د(س)= س (س + ١))

١٧) أي من العلاقات الآتية تمثل دالة من س إلى ص؟

١٨) الرابع المتناسب للأعداد ٢ ، ٦ ، ٩ هو = ...

(١٢ ، ١٨ ، ٢٧ ، ٥٤)

١٩)إذا كانت : د(س) = ٥ فإن : د(٣) - د(١) = ...

(د(٢) ، ٢ ، ١٠ ، صفر)

٢٠) الوسط الحسابي للقيم : ٣٠ ، ٢٠ ، ٥٠ ، ٦٠ هو ....

(٢٥ ، ٤٠ ، ٥٠ ، ٥٥)

٢١) (أكبر قيمة – أصغر قيمة) لمجموعة من البيانات هو ....

(الوسيط ، المدى ، المنوال ، الإنحراف المعياري)

٢٢) إذا كان : (س – ٣ ، ٧) = (٢ ، ٧) فإن : س = ...

(٥ ، ٧ ، ٤ ، –٤)

٢٣) إذا كان : ١ + ٤ $س^٢ ص^٢$ = ٤ س ص

فإن : ....

(ص ∝ $\sqrt{س}$ ، ص ∝ $\frac{١}{س}$ ، ص ∝ س ، ص ∝ $\frac{١}{س^٢}$)

٢٤) إذا كانت النقطة (س – ١ ، س – ٣) تقع في الربع الرابع فإن س = ...

(١ ، ٢ ، ٣ ، ٠)

٢٥) أي من العلاقات التالية تغير عكسي بين المتغيرين س ، ص ؟

($ص^٢$ = ٢ س ، $\frac{ص}{س}$ - س = ٢ ، س ص = ٣ ، $\frac{ص}{س}$ - ٩ = ٥)

٢٦) إذا كانت د(س) = س فإن : ٢ د (٣) – ٣ د (٢) = ...

(١ ، ٠ ، ٦ ، – ١)

٢٧) إذا كان : مجـ (س – $\overline{س}$ $)^٢$ = ٣٦ لمجموعة من القيم عددها يساوي ٩ فإن الإنحراف المعياري= .....

(٢ ، ١٨ ، ٢٧ ، ٤)

٢٨) إذا كانت النقطة (٥ ، م – ٧) تقع على محور السينات فإن م = ...

(٢ ، ٥ ، ٧ ، ١٢)

٢٩) الشكل البياني الذي يمثل التغير الطردي بين س ، ص هو ....

(أ) (ب) (جـ) (د)

٣٠) إذا كانت النقطة (٣ ، ٢) هي رأس منحنى الدالة التربيعية د فإن معادلة خط التماثل هي ....

(س = ٣ ، س = ٢ ، ص = ٣ ، ص = ٢)

٣١) إذا كان س ص = ٥ فإن ....

(ص ∝ س ، ص ∝ $\frac{١}{س}$ ، ص = ٥ – س ، ص = $\frac{س}{٥}$)

٣٢) إذا كانت ص تتغير طردياً مع س وكانت س = ٤ عندما ص = ١,٥ فإن ثابت التغير يساوي.........

($\frac{٣}{٨}$ ، $\frac{٨}{٣}$ ، ٦ ، ٨)

٣٣) (س – ص)(س+ص) =.....

($س^٢ – ص^٢$ ، $س^٢ + ص^٢$ ، $س^٣ – ص^٣$)

٣٤) {٥} ⊃ ....

((٣ ، ٥) ، [٣ ، ٥] ، { ٣٥ } ، { ٣ ، ٥ })

٣٥) اذا كان الزوج المرتب (٣ ، ٢ك) ينتمي لبيان الدالة د(س) = ٢س+٤ فإن ك = ...

(٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥)

٣٦) اذا كان $٢^{ن+١}$ = ٩ فإن $ن^٢$ – ٢ن +٥ = ...

(٠ ، ٥ ، ٨ ، ١٢)

٣٧) $\frac{١}{٣}$ العدد $٣^{١٢}$ = ...

(٣ ، $٣^{١١}$ ، $٣^٤$ ، $٣^{١٢}$)

٣٨) اذا كان س – ص = ٥ فإن ٦س – ٦ص = ...

(١١ ، ٣٠ ، ١ ، –١)

٣٩) ٤٠ ٪ = ...

(٠,٤ ، ٤ ، ٤,٤ ، –٤)

٤٠) اذا كان | س | = ٩ فإن س = ...

(٩ ، –٩ ، ± ٩ ، ∅)

٤١) اذا كان (س – ٣) (س + ٣) = $س^٢$ + ك فإن ك = ...

(٣ ، ٦ ، ٩ ، –٩)

٤٢) $\sqrt[٣]{١٦}$ – $\sqrt[٣]{٥٤}$ =.............

($\sqrt[٣]{٢}$ ، –$\sqrt[٣]{٢}$ ، $\sqrt[٣]{٣٨}$ ، –$\sqrt[٣]{٣٨}$)

٤٣) اذا كان الوسط الحسابي للقيم ٦ ، ٨ ، ٧ ، ب ، ٥ هو ٨ فإن ب =............ (٥ ، ٦ ، ٨ ، ١٤)

٤٤) مجموعة حل المعادلة $س^٢$ + ٩ = ٠ في ح هي...

(٣ ، –٣ ، ±٣ ، ∅)

٤٤) اذا كان – س < ٥ فإن س ٥

(< ، > ، =)

٤٥) مجموعة الاعداد الصحيحة داخل الفترة] –٥ ، ٥[هو .... (٠ ، ٥ ، –٥ ، ١٠)

الاسئلة المقالية

١) إذا كانت س = { ١ ، ٢ ، ٣ } ، ص = { – ١ ، ٠ ، ١ } وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث ٩ ع ب تعني " ب = ٩ – ٢ " لكل ٩ ∋ س ، ب ∋ ص ، اكتب بيان ع ثم مثل العلاقة بمخطط سهمي وبين إذا كانت العلاقة ع دالة أم لا ، وإذا كانت دالة أوجد مداها

٢) إذا كانت : ص ∝ س وكانت ص = ٦ عندما س = ٣ فأوجد العلاقة بين ص ، س

٣) ارسم منحنى الدالة د : د (س) = س^{٢} – ٤ س + ٣ حيث س ∋ ح متخذاً س ∋ [٠ ، ٤]

ومن الرسم أوجد : ١) معادلة خط التماثل
٢) نقطة النهاية الصغرى أو العظمى للدالة

٤) إذا كان : $\frac{٩}{٢} = \frac{ب}{٥} = \frac{٢٩ + ب}{٣س}$ فأوجد قيمة س

٥)إذا كانت ب هي الوسط المتناسب بين أ ، جـ فأثبت أن :

$$\frac{أ^٢ + ب^٢}{ب^٢ + جـ^٢} = \frac{أ}{جـ}$$

٦) احسب الوسط الحسابي للقيم : ٢ ، ٣ ، ٦ ، ٨ ، ١١
ثم استنتج الإنحراف المعياري لها

٧) إذا كانت : ٤ س^٢ + ٩ ص^٢ = ١٢ س ص أثبت أن س تتغير طردياً بتغير مع ص

٨) أوجد العدد الذي إذا أضيف إلى حدي النسبة ٧ : ١١ فإنها تصبح ٢ : ٣

٩) إذا كانت سـ = { ٤ ، ٦ ، ٨ ، ك } ، ص = { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } وكانت ع علاقة من سـ إلى صـ حيث ؟ ع ب

تعني " ب = $\frac{١}{٢}$ ؟ " لكل ؟ ∈ سـ ، ب ∈ صـ

أوجد قيمة ك التي تجعل العلاقة ع دالة من سـ إلى صـ

٢) مثل هذه العلاقة بيانياً

١٠) إذا كانت : س = ل + ٩ ، وكانت ل ∝ ص ، أوجد العلاقة بين س ، ص علماً بأن س = ٢٤ عندما ص = ٥ ، ثم أوجد قيمة ص عندما س = ١٢

١١) عددان صحيحان النسبة بينهما ٣ : ٧ وإذا طرح من كل منهما ٥ أصبحت النسبة بينهما ١ : ٣

١٢) إذا كان : $\frac{س + ص}{٥} = \frac{ص + ع}{٣} = \frac{س + ع}{٦}$

أثبت أن : $\frac{س - ع}{٢} = \frac{س + ص + ع}{٧}$

١٣) اذا كانت س = { ١ ، ٢ ، ٣ }
ص = { ٣ ، ٤ ، ٥ } وكانت ع علاقة من س إلى ص
حيث م ع ب ، تعني " م + ب = عدد أولي " لكل م ∈
س ، ب ∈ ص اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي وبين
ما إذا كانت ع دالة من س إلى ص أم لا مع ذكر السبب ؟

١٤) إذا كانت $\frac{م}{ب} = \frac{٣}{٤}$ فأوجد قيمة النسبة :

٤ م + ب : ٢ م − ب

١٥) إذا كان : $\frac{م^٢ + ب^٢}{ب^٢} = \frac{ب^٢ + ج^٢}{ج^٢}$

فأثبت أن ب وسطاً متناسباً بين م ، ج

١٦) إذا كان وزن جسم على الأرض (و) يتناسب طردياً
مع وزنه على القمر (ر) ، فإذا كان : و = ١٨٢ كجم ، ر
= ٣٥ كجم فأوجد ر عندما و = ٣١٢ كجم

١٧) إذا كان : $\frac{س}{ص} = \frac{٢}{٣}$ أوجد قيمة : $\frac{٦س - ٢ص}{ص - س}$

١٨) أوجد قيمة كل من ﺃ ، ب إذا كان

(ﺃ - ٧ ، ٢٦) = (- ٢ ، ب^{٣} - ١)

١٩) إذا كان $\frac{ﺃ}{ب} = \frac{٣}{٥}$ أوجد قيمة : $\frac{٧ﺃ + ٩ب}{٤ﺃ + ٢ب}$

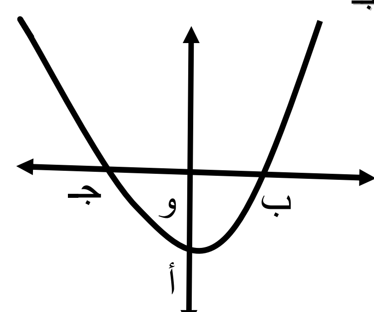
٢٠) إذا كانت : ص تتغير عكسياً بتغير س
وكانت ص = ٨ عندما س = ٢,٥ ، أوجد العلاقة بين س
، ص ثم أوجد قيمة ص عندما س = ٥

٢١) ارسم الشكل البياني للدالة د : د (س) = س^{٢} - ٣
حيث س ∋ [- ٣ ، ٣]

ومن الرسم أوجد :

١) نقطة رأس المنحنى
٢) معادلة محور التماثل
٣) القيمة الصغرى أو العظمى للدالة

٢٢) الشكل المقابل يمثل منحني الدالة د(س) = س^{٢} – م
اذا كان و أ = ٤ وحدات ، اوجد قيمة م
واوجد احداثيي ب ، جـ ثم احسب مساحة المثلث الذي رؤسة أ ، ب ، جـ



٢٥) اذا كان ٣ ، ب ، ١٢ ثلاث كميات موجبة متناسبة فاوجد قيمة المقدار ٤ب+١

٢٦) إذا كانت : س × ص = { (١ ، ١) ، (١ ، ٣) ، (١، ٥) } ، ع = { ١ ، ٢}
اوجد س ، ص ، س^{٢} ، ن (ص^{٢}) ، (ص - ع) × س ، (س ∩ ع) × ص

٢٧) التوزيع التكراري الآتي يبين درجات ٤٠ تلميذاً في أحد الإختبارات لإحدى المواد :

المجموعات	صفر-	٤-	٨-	١٢-	١٦- ٢٠	المجموع
التكرار	٢	٥	٨	١٥	١٠	٤٠

أوجد الإنحراف المعياري لهذا التوزيع

٢٨) الجدول الآتي يبين عدد الأهداف التي سجلت في مباريات لكرة القدم

عدد الاهداف	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦
عدد المباريات	١	٤	٦	٩	٥	٣	٢

أوجد الإنحراف المعياري لهذا التوزيع

حساب المثلثات و الهندسة

أكمل ما يلي :

١) إذا كانت أ (١ ، ٢) ، ب (٣ ، ٤) فإن إحداثي نقطة منتصف ؐب هي ....

٢) المستقيم الذي يوازي محور السينات ويمر بالنقطة (‒٢ ، ٣) معادلته هي ....

٣) إذا كان س ، ص زاويتين متتامتين بحيث س : ص = ١ : ٢ فإن جاس +جتا ص = ...

٤) البعد بين النقطتين (٦ ، ٠) ، (٠ ،٤) يساوي ....

٥) إذا كانت النقطة (٠ ، ؐ) تنتمي للمستقيم ٣س+٤ص+١٢=٠ فإن ؐ= ....

٦) إذا كان ؐب // حـ د وكان ميل ب ؐ = $\frac{٢}{٣}$ فإن ميل حـ د = ...

٧) إذا كان المستقيمان ٢س+ب ص+٣=٠ ، ٣س ‒ ص +٢ = ٠ متعامدان فإن ب = ...

٨) إذا كان جاس = ٠,٥ حيث س زاوية حادة فإن ق(س‸) = ...

٩) البعد بين النقطتين (٥ ، ٠) ، (٠ ، ‒٢) يساوي ....

١٠) جا٦٠+جتا٣٠‒ ظا٦٠ = ...

١١) إذا كان المستقيمان ك س ‒ ٢ص+٣ = ٠ ، ٦س+٣ص‒٥= ٠ متوازيان فإن ك = ...

١٢) ميل المستقيم العمودي علي المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، ٦) ، (‒٤ ، ١) = ...

١٣) جتا^{٢} ٤٥ + ظا^{٢} ٤٥ ‒ جا ٣٠ = ...

١٤) إذا كان أ(٢ ، ‒١) ، ب(٥ ، ٣) فإن أ ب = ...

١٥) جا ٣٠جتا٦٠ + جتا٣٠جا٦٠ = ...

١٦) معادلة المستقيم المار بالنقطة (‒٢، ٧) ويوازي محور الصادات = ...

١٧) ؍ ب ﺣ مثلث قائم الزاوية في ؍ وكان ظاب = ١

فيكون ظاجـ جاجـ جتاجـ = ...

١٨) معادلة المستقيم المار بنقطة الأصل وعمودي علي

المستقيم ص = ٢س هي ....

١٩) ميل المستقيم العمودي علي المستقيم

٣س + ٤ص – ٩ = ٠ يساوي ....

٢٠) جا٦٠جتا٣٠ – جتا٦٠جا٣٠ = ...

٢١) إذا كانت ظا٣س = ١ حيث س زاوية حادة فإن قيمة

س = ...

٢٢) إذا كانت جتا $\frac{س}{٣}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ فإن قيمة س

= ....

٢٣) إذا كان جا(ص + ٧) = ٠,٥

فإن ص = ...

٢٤) البعد بين النقطتين (٣ ، ٤) ونقطة الأصل =

....

٢٥) إذا كان $م_١$ ، $م_٢$ مستقيمان متعامدان فإن $م_١ \times م_٢$ =

....

٢٦) معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (٣ ، –٢)

ويوازي محور السينات هي ....

٢٧) ٢جا٣٠جتا٣٠ = جا ....

٢٨) المستقيم ص = س جا٣٠ + جـ ويمر بالنقطة

(٤ ، ٦) فإن جـ = ...

٢٩) ميل المستقيم الذي معادلته ٢س – ٣ص + ٥ = ٠

هو ....

٣٠) طول القطعة المستقيمة المرسومة بين النقطتين

(٠، ٠) ، (٥ ، ١٢) هي ....

٣١) ظا ٤٥ = ...

٣٢) ظا٤٥ جا٣٠ = ...

٣٣) ٢جا٣٠ جتا٣٠ = ...

٣٤) النقط (–٣، ٠) ، (٠ ، ٣) ، (٣ ، ٠) هي

رؤوس مثلث .... الزاوية

و .... الأضلاع

٣٥) معادلة المستقيم الذي ميله ١ ويمر بنقطة الأصل

هي ....

٣٦) إذا كانت ظا٣س = $\sqrt{٣}$ فإن قياس زاوية

س = ...

٣٧) دائرة مركزها نقطة الأصل وطول قطرها ٦ وحدات

فإن النقطة التي تنتمي للدائرة هي ....

(٦،٠) ، (٠ ، -٦) ، ($\sqrt{8}$ ، ١)

٣٨) جا^{2} ٦٠ + جتا^{2} ٦٠ = ...

٣٩) ميل المستقيم الموازي لمحور السينات = ...

٤٠) ميل المستقيم الموازي لمحور الصادات = ...

٤١) البعد العمودي بين المستقيمين ص -٣ = ٠ ،

ص +٢ = ٠ يساوي ....

٤٢) جا٣٠ = جتاهـ فإن ق(هـ) = ...

٤٣) إذا كان المستقيمان اللذان ميلاهما $\frac{-2}{3}$ ،

$\frac{ك}{6}$ متوازيان فإن ك = ...

٤٤) إذا كان ‌أب قطر في الدائرة حيث أ(١ ، ٢) ،

ب (٣ ، ٤) فإن مركز الدائرة = ...

٤٥) إذا كان البعد بين النقطتين (٠ ، م) ،

(٠ ، ١) هو وحدة طول فإن م = ...

٤٦) المستقيم المار بالنقطتين (١ ، ص) ،(٣ ،٤)

ميله = ظا٤٥ يكون ص = ...

٤٧) جا٦٠+ جتا٣٠+ ظا٦٠ = ...

٤٨) المثلث س ص ع قائم الزاوية في ع وكان س

ص = ٢٥سم ، ص ع= ٧سم ، س ع = ٢٤سم

فإن جاس + جاص = ...

٤٩) ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين (٠ ، ٠) ،

(-٣ ، ٤) = ...

٥٠) مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ... °

٥١) مجموع قياسي الزاويتين المتتامتين يساوي ......

٥٢) المنصفان لزاويتين متجاورتين متكاملتين ....

٥٣) اذا كانت ب تقع علي محور تماثل س ص فإن ب

س .... ب ص

٥٤) المثلث أب جـ متساوي الاضلاع فإن ق(أ) = ...

٥٥) الزاوية التي قياسها ٥٠ تكمل زاوية قياسها ....

٥٦) عدد محاور تماثل المثلث المتساوي الساقين =

....

٥٧) بعد النقطة (٤ ، –٣) عن المحور السيني

يساوي ....وحدة الطول

٥٨) مجموع قياسات الزوايا المتجمعة حول نقطة

واحدة = ...

٥٩) الزاوية الحادة تتمها زاوية ....

وتكملها زاوية ....

٦٠) ميل المستقيم الذي معادلته ص = ٣ هو

....

٦١) المستقيمان العموديان علي مستقيم ثالث في

نفس المستوي يكونان ....

٦٢) مربع مساحته ١٨ سم٢ فإن طول قطره يساوي

..................سم

٦٣) أب جـ قائم الزاوية في ب

فإذا كان ٢أب = $\sqrt{٣}$ أجـ فإن قياس زاوية جـ = ...

٦٤) عدد محاور تماثل الدائرة ....

٦٥) جتا ٣٥ = جا ....

◄ اثبت أن جتا٦٠ = جتا^{٢} ٣٠ – جا^{٢} ٣٠

◄ اثبت أن ظا٦٠=٢ظا٣٠÷ (١– ظا^{٢} ٣٠)

◄ ﻫ ب حـ مثلث قائم الزاوية في ب وكان
٢ ب ﻫ=$\sqrt{٣}$ ﻫ حـ فأوجد النسب المثلثيه للزاوية جـ

◄ اوجد قيمه س بدون استخدام الآلة الحاسبة
س٢ = جتا٦٠ جا٣٠ + جا٦٠ جتا٣٠

◄ اوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٤، ٥) وعمودياً علي أ ب بحيث أ(١ ، ٤) ، ب (-١ ، -٢)

◄ بين نوع المثلث بالنسبة لأضلاعه أ(٣ ، ٠) ب (-٣ ، ٠) ، جـ (٠ ، ٤) ثم احسب محيطه

◄ إذا كان ٢جتا (س+١٥) = $\sqrt{٣}$
فاوجد قيمة ظا٣س – جا٢س

◄ اوجد الميل والجزء المقطوع من محور الصادات بالمستقيم $\frac{س}{٣} + \frac{ص}{٢} = ١$

◄ إذا كان م (٢ ، ـ١) ، ب (٥ ، ٣) فأوجد طول مب ثم اوجد احداثيي جـ حيث جـ منتصف مب

◄ اوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، ٤) ويوازي المستقيم الذي معادلته ٢س ـ ٣ص = ٥

◄ اثبت ان المثلث الذي رؤوسه س(١، ٤) ص (ـ١ ، ـ٢)، ع (٢ ، ـ٣) قائم الزاوية في ص واوجد مساحته

◄مثل بيانيا النقاط م (٢ ، ٣) ، ب(–١ ، –١)
جـ (٣ ، –٤) ، د(٦ ، ٠) ثم اثبت انها رؤوس مربع
واوجد مساحته

◄س ص ع مثلث قائم الزاوية فى ص
فيه س ص = ٥ سم ، س ع = ١٣ سم
أوجد قيمة : (أ) ظاس + ظا ع
(ب) جتا س جتا ع – جا س جا ع
(ج) جا س جتا ع + جتا س جا ع

◄ أ ب ج د شبه منحرف فيه : أ د // ب جـ
ق (< ب) = ٩٠ °، فإذا كان
أ ب = ٣ سم ، أ د = ٦ سم ، ب جـ = ١٠ سم ،
أثبت أن : جتا (< د ب جـ) - ظا (<أ جـ ب) = $\frac{١}{٢}$

◄ متوازي أضلاع فيه : أ(س ، ٢) ، ب(٣، ٨)
جـ (٩ ، ١٠) ، د (٧، ٤)
أوجد س

◄ أوجد معادلة المستقيم الذي يقطع من محور الصادات جزءاً موجباً طوله ٤ وحدات ويوازي المستقيم المار بالنقطتين : (١، ٤) ، (-٣ ، ٧)

◄ أثبت أن النقاط : ٩(٥ ، -٣) ، ب (٦ ، -٤) ،
ج (٧ ، -٥) تكون على استقامة واحدة

◄ اوجد الميل والجزء المقطوع من محور الصادات بالمستقيم الذي معادلته ٣س+٥ص=٦

◄ اوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (١ ، ٣) (-١ ، -٣)

◄ اذا كان البعد بين النقطتين (أ ، ٧) ، (٠ ، ٣) يساوي ٥ وحدات اوجد قيمة أ

◄ اذا كانت النقطة جـ (٣ ، ١) هي منتصف البعد بين أ(١ ، ص) ، ب(س ،٢) فاوجد قيمة س ، ص

امتحان جبر

اختر الاجابة الصحيحة مما بين القوسين

١) اذا كان س ص = ٥ فإن ص ∝ ....

(س ، $\frac{١}{س}$ ، س − ٥ ، ٥ − س)

٢) إذا كانت النقطة (س − ٥ ، ٣ − س) تقع في الربع الثالث فإن س = ...

(٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥)

٣) إذا كان $\frac{أ}{٢}$ = $\frac{ب}{٣}$ = ٥ فإن : أ + ب = ...

(٥ ، ١٠ ، ١٥ ، ٢٥)

٤) $\sqrt{١٠^٢ − ٨^٢}$ = ١٠ − .....

(٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨)

٥) نصف العدد $٤^{٢٠}$ = ...

($٤^{١٠}$ ، $٢^{٢٠}$ ، $٢^{٣٩}$ ، $٢^{١٠}$)

٦) العدد الموجب الذي ضعف مربعه يساوي ٥٠ هو .....

(٥ ، ١٠ ، ٢٥ ، ١٠٠)

٧) اذا كان ن(س٢) = ٩ ، ن(س ×ص) = ٦

فإن ن(ص) = ... (٢ ، ٣ ، ٤ ، ١٨)

س٢) أ) إذا كانت س = { ٢ ، ٣ ، ٥ }
ص = { ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ } وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعني " ب = ٢ أ"
لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص ، اكتب بيان ع ثم مثل العلاقة بمخطط سهمي وبين إذا كانت العلاقة ع دالة أم لا ،وإذا كانت دالة أوجد مداها ؟

ب) اذا كانت د (س) = ٥س +ب
وكانت د(٢) = ١٢ اوجد قيمة ب ؟

س٣) أ) إذا كانت : ص ∝ $\frac{١}{س}$ وكانت ص = ٣
عندما س = ٢ أوجد العلاقة بين س ، ص ثم أوجد قيمة ص عندما س = ١,٥

ب) إذا كان : ٤ س = ٣ ص أوجد قيمة :

$$\frac{\text{٣ س + ص}}{\text{٥ص + س}}$$

س٤) أ) احسب الانحراف المعياري للقيم

٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ؟

ب) مثل بيانيا الدالة د(س) = س − ٣ ثم أوجد نقطتي تقاطع المستقيم الممثل لها مع محوري الاحداثيات

س٥) أ) إذا كانت ب هي الوسط المتناسب بين

فأثبت أن : $\frac{\text{أ - ب}}{\text{أ - جـ}} = \frac{\text{ب}}{\text{ب+جـ}}$

ب) اذا كانت (س −٢ ، $\text{٣}^{\text{ص−١}}$) = (٣ ، ١)

فأوجد قيمة س ، ص ؟

امتحان هندسة وحساب مثلثات

اختر الاجابة الصحيحة مما بين القوسين

١) اذا كانت ظا ٣س = $\sqrt{3}$ فإن قياس زاوية س = ...

(١٠ ، ١٥ ، ٢٠ ، ٣٠)

٢) محيط المربع الذي مساحته ١٠٠سم٢ يساوي .... سم

(٤ ، ٥٠ ، ١٠ ، ٤٠)

٣) البعد العمودي بين المستقيمين س – ٢ = ٠ ، س + ٢ = ٠ يساوي .... وحدة طول

(صفر ، ٥ ، ٢ ، ٤)

٤) جتا (س + ١٥) = $\frac{١}{٢}$ ، فإن جا س = ...

(١ ، ٠،٥ ، $\frac{١}{\sqrt{2}}$ ، $\frac{\sqrt{3}}{٢}$)

٥) جا ٢٠ = حتا ....

(٤٠ ، ٥٠ ، ٧٠ ، ٩٠)

٦) قياس زاوية السداسي المنتظم = ...

(٦٠ ، ٩٠ ، ١٠٨ ، ١٢٠)

٧) معادلة المستقيم الذي ميله ١ ويمر بنقطة الاصل هي ....

(ص =١ ، س = ١ ، ص = س ، ص = س+١)

س٢)أ) اوجد قيمه س بدون استخدام الآلة الحاسبة

س٢ = جتا٦٠ جا٣٠ + جا٦٠ جتا٣٠

ب) إذا كان : ٢(- ١ ، -١) ، ب(٢ ، ٣) ، ج(٦ ، ص) هي رؤوس مثلث قائم الزاوية في ب ، أوجد قيمة : ص

ثم أوجد منتصف : $\overline{بج}$

س٣) أ) أوجد قيمة :

حتا ٦٠° حا ٣٠° – حا ٦٠°طا ٦٠° + حتا٣٠°

ب) أثبت أن المستقيم الذي معادلته ٢ س + ص + ٨ =٠ عمودي على المستقيم المار بالنقطتين
أ(٢ ، ٣) ، ب (– ٢ ، ١)

س٤) أ) أوجد معادلة المستقيم الذي يقطع من محور الصادات جزءاً موجباً طوله ٤ وحدات ويوازي المستقيم المار بالنقطتين : (١ ، ٤) ، (– ٣ ، ٧)

ب) إذا كان المثلث الذي رؤوسه النقاط أ(٣ ، – ١) ، ب (س ، ٣) ، ج (٥ ، ٣) قائم الزاوية في أ ، فأوجد قيمة : س ثم أوجد مساحته

س٥)أ) س ص ع مثلث قائم الزاوية في ص فيه
س ص = ٣ سم ، س ع = ٥ سم
أوجد قيمة : ١) طا س × طا ع
٢) حا س + حا ع

ب) أثبت أن النقاط : ا(٥ ، – ٣) ، ب (٦ ، – ٤) ، ج (٧ ، – ٥) تكون على استقامة واحدة

لا تضيع وقتك فيما لا يفيد، فالوقت إذا فات لا يُعوض وكان الحسن البصري يقول
إنما أنت أيام، كلما ذهب يَوْمٌ ذهب بعضك